

Übungsblatt 10

14. Dezember 2022
Besprechung Kalenderwoche 51

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Koeffizienten der Newton-Cotes-Formeln für $n = 2$ (Simsonregel), $n = 3$ ($\frac{3}{8}$ -Regel) und $n = 4$ (Milne-Regel).

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f : D \rightarrow [-1, 1]$ mit $f(x) = \sin \frac{\pi}{4}x$.

- Bestimmen Sie eine Näherung für das bestimmte Integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{4}x \, dx$, indem Sie das Interpolationspolynom $P_2(x)$ an den Stützstellen $(0, f(0))$, $(1, f(1))$ und $(2, f(2))$ der Funktion $f(x)$ benutzen.
- Bestimmen Sie eine weitere Näherung für das Integral I , indem Sie als Näherung für $f(x)$ das Taylorpolynom an der Stelle $x^* = 1$ benutzen.
- Vergleichen Sie die unter (a) und (b) erhaltenen Näherungswerte mit einem Wert aus dem Taschenrechner.

Aufgabe 3

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Führen Sie eine LU -Faktorisierung der Matrix A durch.
- Bestimmen Sie die Lösung \mathbf{x} des Gleichungssystems mithilfe der LU -Faktorisierung.

Aufgabe 4

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

- Zeigen Sie, dass auf die Matrix A eine Cholesky-Zerlegung anwendbar ist.
- Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems mithilfe der Cholesky-Zerlegung.

Aufgabe 5

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} + 3 \end{pmatrix}.$$

- Führen Sie eine QR -Faktorisierung der Matrix A durch.
- Bestimmen Sie die Lösung \mathbf{x} des Gleichungssystems mithilfe der QR -Faktorisierung.

Die folgende Aufgabe ist eine **Hausaufgabe**, die bis zum 05. Januar 2023 über moodle abgegeben werden kann. Schreiben Sie Ihren **Namen** und ihre **Übungsgruppe** auf Ihre Lösungen.

Aufgabe H6 (Hausaufgabe zur Abgabe, 2 Punkte)

Seien x, y die ersten beiden Ziffern Ihrer Matrikelnummer. Sei $a = 10 \cdot x + y$. Bestimmen Sie die Nullestellen von $x^2 - a$ durch

- Newtonverfahren mit Startwert $x_0 = 1$
- Sekantenverfahren mit $x_0 = 0$ und $x_1 = a$
- Regula Falsi mit Startintervall $[0, a]$
- Bisektionsverfahren mit Startintervall $[0, a]$

Jeweils 10 Iterationen.