Übungsblatt 11

20. Dezember 2022
Besprechung Kalenderwoche 2

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ eine Matrix vom Rang n, dann ist die Lösung von

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}x = \mathbf{A}^T b$$

eine Lösung von $\min_{x\in\mathbb{R}} \|\mathbf{A}x - b\|$.

Aufgabe 2

Benutzen Sie Aufgabe 1, um zu zeigen, dass für eine Matrix $\mathbf{A}$ mit QR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$ die Lösung von $\min_{x\in\mathbb{R}} \|\mathbf{A}x - b\|$ die Lösung von $\mathbf{R}x = \mathbf{Q}^T b$ ist.

Aufgabe 3

Wenden Sie Aufgabe 1 an, um $\|\mathbf{A}x - b\|$ zu minimieren für

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

.

Aufgabe 4

Zeigen Sie: Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gilt:

$$\|\mathbf{A}x\|_1 \leq \|\mathbf{A}\|_1 \cdot \|x\|_1$$

und

$$\|\mathbf{A}x\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \|x\|_\infty.$$

Aufgabe 5

Prüfen Sie, ob die Differentialgleichungen

(a) $y''x \ln x = y'$,

(b) $y'''y = y''y'$,

(c) $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$.

von folgenden Funktionen erfüllt werden ($C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}$):

(a) $y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2$,

(b) $y = C_1 e^{\sqrt{C_3 x}} + C_2 e^{\sqrt{C_3 x}}$ und $y = C_4 x + C_5$,

(c) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$

Die folgende Aufgabe ist eine **Hausaufgabe**, die bis zum 11. Januar 2023 über moodle abgegeben werden kann. Schreiben Sie Ihren **Namen** und ihre **Übungsgruppe** auf Ihre Lösungen.

Aufgabe H7 (Hausaufgabe zur Abgabe, 2 Punkte)

Seien x_1 und x_2 die ersten beiden Ziffern Ihrer Matrikelnummer. Weiter sei $a := 10 \cdot x_1 + x_2$ definiert und die 4×4-Matrix wie folgt definiert:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 2 & a & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Kondition von $\mathbf{A}$ bezüglich der Norm $\| \ \|_1$. Dabei dürfen Sie ein beliebiges Programm nutzen, um $\mathbf{A}^{-1}$ zu bestimmen.

(b) Wenden Sie auf $\mathbf{A}$ 5 Schritte des Jacobi- sowie des Gauß-Seidel-Verfahrens mit Startvektor $(0, 0, 0, 0)$ an. Bestimmen Sie in jedem Schritt den relativen und absoluten Fehler, wobei Sie wie in der Vorlesung diskutiert, beutzen:

$$\|\Delta x\| \leq \frac{\text{cond}(\mathbf{A})}{\|\mathbf{A}\|} \cdot \|\Delta b\|$$

und

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Dabei ist $\tilde{x}$ Ihre Nährungslösung, x die exakte Lösung und $\Delta x = \tilde{x} - x$, $\Delta b = b - \mathbf{A}\tilde{x}$.