Übungsblatt 13

19. Januar 2023
Besprechung Kalenderwoche 4

Aufgabe 1

Gegeben sei die Differentialgleichung $y' - \sqrt{x}y = 1 - (x-3)\sqrt{x}$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' - \sqrt{x}y = 0$.

(b) Ermitteln Sie eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung $y' - \sqrt{x}y = 1 - (x-3)\sqrt{x}$ mithilfe des Ansatzes $y_p = Ax + B$ mit $A,\, B \in \mathbb{R}$.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem der inhomogenen Differentialgleichung mit $y(1) = -1$.

Aufgabe 2

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

(a) $y'' + 2ay' + a^2y = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$,

(b) $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0$ mit $t_0 = 0, s_0 = 1, s_0' = 1$,

(c) $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 4x = 0$.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Differentialgleichung $y''' + y'' + 8y' = 10y$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = 2, y'(0) = 4$ und $y''(0) = -67$.

(c) Formulieren Sie diese Differentialgleichung als vektorwertige Differentialgleichung 1. Ordnung.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Differentialgleichung $y''' - 2y'' + y' = 0$ mit der allgemeinen Lösung $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3$ wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit der Lösungen $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ und $y_3 = 1$.

(b) Bestätigen Sie die allgemeine Lösung.

Aufgabe 5

Ein Körper, der auf $100°C$ erhitzt wurde, kühlt sich in einem Raum mit $20°C$ in 10 Minuten auf $60°C$ ab.

(a) Lösen Sie dazu die Differentialgleichung $\frac{dT}{dt} = -k(T - 20°C)$, d.h. die Geschwindigkeit der Abkühlung ist proportional zur Temperaturdifferenz.

(b) Bestimmen Sie die Zeit, die der Körper braucht, um sich auf $25°C$ abzukühlen.