

## Übungsblatt 9

07. Dezember 2022  
Besprechung Kalenderwoche 50

### Aufgabe 1

Die Funktion

$$f(x) = \frac{6}{x-2}$$

ist für  $2 < x < \infty$  durch ein Interpolationspolynom 2. Grades bei Verwendung der Stützstellen  $(3, f(3))$ ,  $(4, f(4))$  und  $(5, f(5))$  zu approximieren.

- Bestimmen Sie das Interpolationspolynom  $P_2(x)$  mit den Methoden von Lagrange und Newton.
- Benutzen Sie  $P_2(x)$ , um  $f(x)$  an der Stelle  $x = 3,5$  näherungsweise zu berechnen.

### Aufgabe 2

Gegeben seien die folgenden Funktionswerte der Funktion  $f(x) = \sqrt{2x}$ :

$i$	0	1	2	3
$x_i$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8
$f(x_i)$	1	2	3	4

- Berechnen Sie zu den ersten drei Daten  $(x_i, f(x_i))$ ,  $i = 0, 1, 2$ , das zugehörige Interpolationspolynom in der Lagrange- und in der Newton-Darstellung. Die jeweiligen Polynomdarstellungen müssen am Ende nicht ausmultipliziert und nach Potenzen von  $x$  zusammengefasst werden.
- Verwenden Sie ein in a) bestimmtes Polynom, um eine Näherung für  $\sqrt{2}$  zu finden. Welche Polynomdarstellung ist hierzu besser geeignet?
- Bestimmen Sie das Interpolationspolynom zu allen Daten. Welche Darstellung wählen Sie? Berechnen Sie wiederum eine Näherung für  $\sqrt{5}$ .

**Aufgabe 3**

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \frac{1}{2-x}$ .

- Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom bezüglich der Stützstellen  $(-1, f(-1))$ ,  $(0, f(0))$  und  $(1, f(1))$ .
- Geben Sie eine Näherung für  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  mithilfe des Interpolationspolynoms an und vergleichen Sie mit dem wirklichen Wert des Integrals, indem Sie  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  bestimmen.

**Aufgabe 4**

Sei die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \tan(\pi x)$  an den Stützstellen  $(0, f(0))$ ,  $(\frac{1}{6}, f(\frac{1}{6}))$  und  $(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$  gegeben.

- Bestimmen Sie das Interpolationspolynom  $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ .
- Benutzen Sie zur Interpolation  $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$ , d. h. berechnen Sie die Konstanten  $b_0$ ,  $b_1$  und  $b_2$  von  $Q(x)$ .
- Welche Näherungen ergeben sich aus (a) und (b) für  $\tan(20^\circ)$ ?

**Aufgabe 5**

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}_{>10} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \ln(x + 10)$ .

- Ermitteln Sie einen Näherungswert für  $\ln 11,1$  mithilfe der Polynominterpolation an den Stützstellen  $(0, f(0))$ ,  $(1, f(1))$  und  $(2, f(2))$ .
- Schätzen Sie den Interpolationsfehler für  $\ln 11,1$  ab.
- Wie hängt das Vorzeichen des Interpolationsfehlers von  $x$  ab?

Die folgende Aufgabe ist eine **Hausaufgabe**, die bis zum 20. Dezember über moodle abgegeben werden kann. Schreiben Sie Ihren **Namen** und ihre **Übungsgruppe** auf Ihre Lösungen.

**Aufgabe H5 (Hausaufgabe zur Abgabe, 2 Punkte)**

Seien  $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$  die ersten 5 Ziffern ihrer Matrikelnummer.

- (a) Finden Sie ein Polynom  $p(x)$  vom Grad 4 durch die fünf Stützstellen  $(i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .
- (b) Finden Sie eine kubische Splinefunktion  $s(x)$  durch die drei Stützstellen  $(1, y_1)$ ,  $(3, y_3)$  und  $(5, y_5)$  mit den Randbedingungen  $s'(1) = s'(5) = 0$ .
- (c) Skizzieren Sie die Graphen von  $s(x)$  und  $p(x)$ .

Hinweis: Zum Finden der Polynome  $p(x)$  und  $s(x)$  müssen lineare Gleichungssysteme gelöst werden. Schreiben Sie diese Gleichungssysteme bitte auf. Zum Lösen der Gleichungen als auch zum Skizzieren der Funktionsgraphen dürfen Sie einschlägige Computerprogramme benutzen.