

Übungsblatt 9

07. Dezember 2022
Besprechung Kalenderwoche 50

Aufgabe 1

Die Funktion

$$f(x) = \frac{6}{x-2}$$

ist für $2 < x < \infty$ durch ein Interpolationspolynom 2. Grades bei Verwendung der Stützstellen $(3, f(3))$, $(4, f(4))$ und $(5, f(5))$ zu approximieren.

- Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P_2(x)$ mit den Methoden von Lagrange und Newton.
- Benutzen Sie $P_2(x)$, um $f(x)$ an der Stelle $x = 3,5$ näherungsweise zu berechnen.

Aufgabe 2

Gegeben seien die folgenden Funktionswerte der Funktion $f(x) = \sqrt{2x}$:

| | | | | |
|----------|---------------|---|---------------|---|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 |
| x_i | $\frac{1}{2}$ | 2 | $\frac{9}{2}$ | 8 |
| $f(x_i)$ | 1 | 2 | 3 | 4 |

- Berechnen Sie zu den ersten drei Daten $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2$, das zugehörige Interpolationspolynom in der Lagrange- und in der Newton-Darstellung. Die jeweiligen Polynomdarstellungen müssen am Ende nicht ausmultipliziert und nach Potenzen von x zusammengefasst werden.
- Verwenden Sie ein in a) bestimmtes Polynom, um eine Näherung für $\sqrt{2}$ zu finden. Welche Polynomdarstellung ist hierzu besser geeignet?
- Bestimmen Sie das Interpolationspolynom zu allen Daten. Welche Darstellung wählen Sie? Berechnen Sie wiederum eine Näherung für $\sqrt{5}$.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2-x}$.

- Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom bezüglich der Stützstellen $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$ und $(1, f(1))$.
- Geben Sie eine Näherung für $\int_{-1}^1 f(x) dx$ mithilfe des Interpolationspolynoms an und vergleichen Sie mit dem wirklichen Wert des Integrals, indem Sie $\int_{-1}^1 f(x) dx$ bestimmen.

Aufgabe 4

Sei die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \tan(\pi x)$ an den Stützstellen $(0, f(0))$, $(\frac{1}{6}, f(\frac{1}{6}))$ und $(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$ gegeben.

- Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.
- Benutzen Sie zur Interpolation $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$, d. h. berechnen Sie die Konstanten b_0 , b_1 und b_2 von $Q(x)$.
- Welche Näherungen ergeben sich aus (a) und (b) für $\tan(20^\circ)$?

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}_{>10} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(x + 10)$.

- Ermitteln Sie einen Näherungswert für $\ln 11,1$ mithilfe der Polynominterpolation an den Stützstellen $(0, f(0))$, $(1, f(1))$ und $(2, f(2))$.
- Schätzen Sie den Interpolationsfehler für $\ln 11,1$ ab.
- Wie hängt das Vorzeichen des Interpolationsfehlers von x ab?

Die folgende Aufgabe ist eine **Hausaufgabe**, die bis zum 20. Dezember über moodle abgegeben werden kann. Schreiben Sie Ihren **Namen** und ihre **Übungsgruppe** auf Ihre Lösungen.

Aufgabe H5 (Hausaufgabe zur Abgabe, 2 Punkte)

Seien $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ die ersten 5 Ziffern ihrer Matrikelnummer.

- (a) Finden Sie ein Polynom $p(x)$ vom Grad 4 durch die fünf Stützstellen (i, y_i) , $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
- (b) Finden Sie eine kubische Splinefunktion $s(x)$ durch die drei Stützstellen $(1, y_1)$, $(3, y_3)$ und $(5, y_5)$ mit den Randbedingungen $s'(1) = s'(5) = 0$.
- (c) Skizzieren Sie die Graphen von $s(x)$ und $p(x)$.

Hinweis: Zum Finden der Polynome $p(x)$ und $s(x)$ müssen lineare Gleichungssysteme gelöst werden. Schreiben Sie diese Gleichungssysteme bitte auf. Zum Lösen der Gleichungen als auch zum Skizzieren der Funktionsgraphen dürfen Sie einschlägige Computerprogramme benutzen.