Der vorliegende Sammelband ist im Jahr der Mathematik 2008 entstanden. Ursprünglich waren die einzelnen Artikel nur zur Veröffentlichung in der Tagespresse gedacht. Doch waren die Beiträge so interessant und lesenswert, dass die Idee sich geradezu aufdrängte, diese Artikel in einem Band zusammenzutragen und damit einem breiteren Leserkreis zur Verfügung zu stellen. Ich freue mich, dass Herbert Henning diese Anregung auf sich genommen und der Mühe der Herausgeberschaft unterzogen hat.

Diese Beiträge, überwiegend von Wissenschaftlern der Fakultät für Mathematik an der Otto-von-Guericke-Universität verfasst, vermitteln einen imponierenden Eindruck von der Vielseitigkeit und Praxisbedeutung der Mathematik. Abstrakt wissen wir das alle, im Einzelnen und ganz konkret ist es dann meist faszinierend und häufig verblüffend, wozu mathematische Problemlösungen in vielen Bereichen führen. Die Mathematik, häufig und zurecht als reine Wissenschaft apostrophiert, ist zugleich in vielfältiger Weise anwendungsbezogen. In vielen interdisziplinären Forschungsfeldern, wo ein besonders großer Erkenntnisfortschritt erwartet wird, ist nicht selten die mathematische Theorie die Grundlage des methodischen Vorgehens.

Es ist zu hoffen, dass die Lektüre dieses Bandes die Motivation verstärkt, sich mit der Mathematik zu beschäftigen und junge Menschen animiert, ein Mathematikstudium zu beginnen. Da kann man eigentlich nichts falsch machen, und am Ende des Studiums stehen einem (fast) alle Wege offen.

Dieser Band ist ferner geeignet, die Frage, wo man Mathematik studieren soll, zu beantworten, ... natürlich an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg.
Viel Freude bei der Lektüre!

Prof. Dr. K. E. Pollmann
Rektor

Vorwort

2008 war das Jahr der Mathematik, in dem die Mathematiker in ganz Deutschland auf vielfältige Art und Weise ihr Arbeitsgebiet in die Öffentlichkeit getragen haben. So gab es auch in Magdeburg eine Vielzahl von Aktivitäten, die großes allgemeines Interesse fanden. Unter ihnen insbesondere die Reihe *Der mathematische Blick*, eine Folge von Beiträgen der Fakultät für Mathematik, in denen einzelne Gebiete der Mathematik monatlich in der *Volksstimme* vorgestellt wurden. Die Bandbreite reichte von der *Reinen Mathematik*, also abstrakten Strukturaussagen, bis hin zur *Angewandten Mathematik*, die sich mit dem Lösen von tagtäglich in der Praxis auftretenden Problemen beschäftigt.

Eine kleine Fakultät wie die in Magdeburg kann natürlich nicht alle Gebiete der Mathematik mit Experten abdecken. So wird manches Wesentliche nicht angesprochen. Trotzdem haben wir versucht, ein möglichst breites Bild vom Wesen der Mathematik zu zeichnen. Der interessierte Leser wird in vielen der Beiträge auf Überraschendes und Unerwartetes stoßen. Manches wird vielleicht anders sein, als man es vermutet hat. Neugierde wird geweckt. Gerade dies macht die Mathematik so spannend und interessant.

Die hier zusammengestellten Artikel geben in überarbeiteter Form im wesentlichen den Inhalt der in der *Volksstimme* erschienenen Beiträge wieder.

Die Fakultät für Mathematik wünscht allen viel Freude und Unterhaltung beim Lesen.

Wolfgang Willems

Dekan

Volksstimme
Wochenend-Magazin
1. März 2008
Teil VI
Volksstimme vom 1.03.2008

Von der Schwierigkeit, Kugeln so dicht wie möglich zu verpacken

Kugeln, Kepler, Katastrophen

Seit dem Jahr 2000 veranstaltet das Bundesministerium für Bildung und Forschung zusammen mit Partnern die Wissenschaftsjahre. 2008 erklärte es zum „Jahr der Mathematik". Durch eine Vielzahl von Veranstaltungen und Initiativen soll deutlich werden: Mathematik ist Überraschung, Abenteuer und Experiment. Professoren der Fakultät für Mathematik an der Universität Magdeburg werden das in einer Beitragsreihe in der Volkstimme veranschaulichen. Wir starten heute mit dem Problem des effektiven Stapelns von Kugeln.

Von **Prof. Dr. Martin Henk**

Es begann alles ganz harmlos und unverfänglich, vor sehr, sehr langer Zeit. Im Jahre 1611 veröffentlichte der Astronom und Mathematiker Johannes Kepler (1571 – 1630) ein Büchlein mit dem Titel „Vom sechseckigen Schnee", das er seinem Freund und Mentor, dem Prager Hofrat Wackher von Wackenfels als Neujahrsgeschenk widmete.

Kepler entwickelte darin für die damalige Zeit kühne Ideen zum Aufbau der Materie und untersuchte unter anderem verschiedene in der Natur auftretende Formen und Muster. Darunter nicht nur Schneeflocken, sondern auch die Kerne von Granatäpfeln, von denen sehr viele auf sehr geringem Raum gepackt sind.

Wissenschaftsjahr 2008
Mathematik
Alles, was zählt

Dies führte ihn dann zu der Betrachtung von verschiedenen Anordnungen gleich großer Kugeln, und er fragte sich, welches wohl die beste, ökonomischste, dichteste Packung von Kugeln ist. Dabei verstehen wir unter der Dichte einer Packung, den Anteil des Raumes, der von den Kugeln überdeckt wird. Hat zum Beispiel eine Packung die Dichte 0,75, dann werden 75 Prozent des Raumes von der Packung ausgefüllt, auf 25 Prozent des Raumes befinden sich folglich keine Kugeln.

Zurück zu den Granatäpfeln. Die Anordnung der Granatäpfel entspricht nun einer Kugelpackung, die heute als die fcc-Packung bekannt ist. Sie ist die natürlichste Anordnung von Kugeln, die man sich vorstellen kann, und man findet sie bei jedem Obsthändler, der seine Orangen oder Äpfel stapelt.

Mathematisch exakter lässt sie sich wie folgt beschreiben: Zunächst wird eine Grundschicht von Kugeln konstruiert, in der jede Kugel von sechs anderen Kugeln berührt wird. Dadurch entsteht eine sogenannte hexagonale Packung. Anschließend wird eine Kopie dieser Schicht auf die Grundschicht gelegt, so dass die Kugeln in die Lücken der Grundschicht fallen. Dieses Stapeln setzt man nun immer weiter fort.

Die fcc-Packung findet man häufig in der Natur, zum Beispiel kristallisieren sich zahlreiche Kristalle wie Gold, Silber und Aluminium gemäß dieser Anordnung. Ihre Dichte ist recht hoch, sie beträgt ungefähr 74 Prozent. Sie ist allerdings nur eine von unendlich vielen Packungen mit dieser Dichte. Kepler war nun überzeugt, dass es keine Packung mit einer größeren Dichte geben kann, und damit war die berühmte Kepler-Vermutung geboren.

Seither hat dieses Problem viel Aufmerksamkeit auf sich gezogen. Viele Helden der Mathematikgeschichte haben sich damit beschäftigt: Carl Friedrich Gauß löste den Spezialfall der Gitterpackungen. David Hilbert nahm es in seine legendäre Problemsammlung auf, die er im Jahre 1900 auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Paris präsentierte.

Aber ein umfassender Beweis dieser doch so offensichtlich richtigen Kepler-Vermutung war lange Zeit nicht in Sicht.

Im August 1998 kündigte der amerikanische Mathematiker Tom Hales an, dass seine mehr als siebenjährigen Untersuchungen zur Kepler-Vermutung erfolgreich zum Abschluss gekommen seien. Allerdings beruht der Beweis von Hales sehr stark auf Computerberechnungen, und zwar in einem für mathematische Arbeiten nie gekannten Umfang.

Die Begutachtung der Arbeiten von Hales durch Experten hat daher auch mehr als fünf Jahre gedauert, und letztendlich können auch diese Gutachter nicht garantieren, dass alle Computerberechnungen korrekt sind. Und so bleiben doch kleine Zweifel und die Hoffnung, auf eine schöne computerfreie Lösung.

Gehen wir noch einmal zurück zum Anfang unserer Geschichte. Dort ging es um die Kerne von Granatäpfeln und davon gibt es nur eine endliche Anzahl in einem Apfel. Bei der Kepler-Vermutung haben wir uns aber mit unendlich vielen Kugeln beschäftigt. Somit bleibt zu klären: Was ist die dichteste Anordnung einer bestimmten Anzahl von Kugeln?

Dies führt uns zu einem recht jungen mathematischen Gebiet. Erste Berechnungen zu endlichen Kugelpackungen finden sich bei dem norwegischen Zahlentheoretiker Axel Thue (1863 – 1922). Genauer gesagt, hat Thue sich mit der entsprechenden Problematik in der Ebene auseinandergesetzt, das heißt mit Kreispackungen. Eine Frage ist hier zum Beispiel: Wie lassen sich zehn gleich große Kreise (etwa 1 Euro-Stücke) so anordnen, dass der Flächeninhalt ihrer konvexen (lat.: nach außen gewölbten) Hülle minimal ist.

Man kann sich dies so vorstellen, dass man ein Gummiband so weit auseinander zieht, bis es die zehn Euro-Stücke enthält. Dann lässt man es los, und der Bereich, der von dem Band begrenzt wird, ist die konvexe Hülle. Der Flächeninhalt einer solchen Hülle lässt sich elementar berechnen, und dieser soll minimiert werden. Das obige Bild der Euo-Münzen zeigt übrigens eine optimale Anordnung von zehn Kreisen, und aufgrund von neueren Ergebnissen aus dem Jahre 2000 kennt man auch für fast jede andere Anzahl von Kreisen die bestmögliche Anordnung.

Was ist zum Beispiel mit 19 Kreisen? In diesem Fall reicht ein Blick in den Magdeburger Dom.

Dem Volksglauben nach zeigt die Skulptur den Kaiser Otto I. mit seiner ersten Frau Editha. Die Schale in des Kaisers Hand beinhaltet 19 Kugeln. Sie sollen ein Symbol für die Himmelssphäre darstellen, sind aber auf alle Fälle optimal angeordnet.

So schön und attraktiv dieses Problem in der Ebene, also mit Kreisen, ist, so unzugänglich und katastrophal wird es im Raum mit Kugeln. Hier müssen wir zunächst unser Gummiband aus der Ebene durch eine elastische Hülle ersetzen, und den zu minimierenden Flächeninhalt durch das Volumen.

Das Bild links zeigt die konvexe Hülle von 6 Kugeln, deren Mittelpunkte alle auf einer Geraden liegen und je zwei benachbarte Kugeln berühren sich. Solche einfachen, linearen Anordnungen spielen eine spezielle Rolle in der Packungstheorie, und der ungarische Mathematiker László Fejes Tóth (1915-2005) hat ihnen den einprägsamen Namen Wurst gegeben, da sie an eine ungarische Salami erinnern. Obwohl sie so einfach zu beschreiben sind, stellen sie in einigen Fällen eine recht gute Verpackungsmöglichkeit dar.

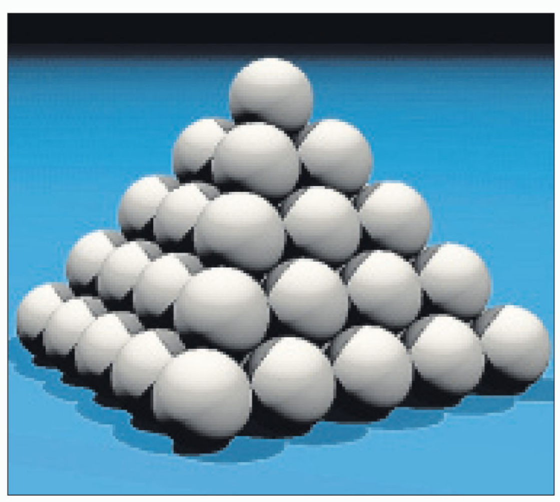
Vergleicht man die Wurst von 6 Kugeln mit der daneben abgebildeten oktaedrischen Anordnung von 6 Kugeln, wobei 4 in einer Ebene sind, dann hat die wurstförmige Anordnung ein kleineres Volumen. Hätten Sie das gedacht? Aber welches ist die beste Anordnung von 6 Kugeln?

Wahrscheinlich ist es die Wurst, und die Mathematiker vermuten, dass für weniger als 56 Kugeln immer eine Wurst bestmöglich ist. Beginnend mit 56 Kugeln sollen clusterförmige Anordnungen (Kugelhaufen) optimal sein. Diese plötzliche Änderung der Gestalt einer optimalen Anordnung hat in der Fachliteratur einen speziellen Namen bekommen: Wurstkatastrophe. Zur Zeit ist man aber noch weit davon entfernt, diese Vermutung beweisen zu können, was gewissermaßen auch eine kleine Katastrophe ist.

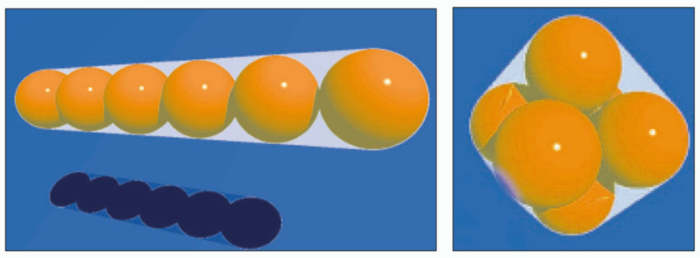
Auf den ersten Blick mögen die hier beschriebenen Kugelpackungsprobleme ein wenig kurios und künstlich erscheinen. Aber das hier Vorgestellte ist nur ein kleiner Ausschnitt aus der Welt der Packungen, die zahlreiche Anwendungen inner- und außerhalb der Mathematik hat. Ausgehend von den Würsten zum Beispiel hat sich eine Theorie entwickelt, die sowohl bei der Industrieanfertigung von isolierten mehradrigen Kabeln Anwendung findet, als auch hilft, optimale Konfigurationen im Zusammenhang mit Kristallen oder Microclustern zu erklären.

Die Problematik der unendlichen Kugelpackungen wiederum ist eng verbunden mit der Frage nach optimalen Codes. Dieser Aspekt führt auch zu einem anderen sehr spannenden Kugelpackungsproblem, dem sogenannten Kussproblem, das auf einen Streit zwischen Isaac Newton (1643 – 1727) und David Gregory (1659 – 1708) zurückgeht. Dies ist aber wieder eine andere Geschichte.

Lesen Sie nächste Woche von Prof. Herbert Henning: „Mathematik, die man hören kann"



Die Anordnung der Kerne in Granatäpfeln (oben) entspricht einer Kugelpackung, die heute als fcc-Packung bekannt ist. Sie ist die natürlichste Anordnung von Kugeln, die man sich vorstellen kann, und man findet sie bei jedem Obsthändler, der seine Orangen stapelt (Schema rechts).
Die Schale in der Hand der Kaiser-Otto-Skulptur (li.) im Magdeburger Dom ist die optimale ebene Packung für 19 Kugeln, die dichteste für zehn Euro-Münzen ist die oben rechts gezeigte Form.
Abb.; flagstaffotos.com.au



Wie verpackt man sechs gleichgroße Kugeln am effektivsten – in Form einer Wurst (links) oder als Haufen wie in der rechten Abbildung?

Zum Nachlesen

Als ein- und weiterführende Literatur zu der Thematik ist das Buch „Kugelpackungen – Von Kepler bis heute" von Max Leppmeier aus dem Jahr 1997 zu empfehlen, das zurzeit allerdings nur antiquarisch oder in der Bibliothek zu haben ist.
Nur in Englisch verfügbar ist das populärwissenschaftliche Buch zur Lösung der Kepler-Vermutung von George G. Szpiro: „Kepler's Conjecture – How Some of the Greatest Minds in History Helped Solve One of the Oldest Math Problems in the World.

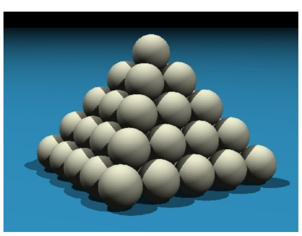
Kugeln, Kepler, Katastrophen

MARTIN HENK

Es begann alles ganz harmlos und unverfänglich, vor sehr sehr langer Zeit ...
Im Jahre 1611 veröffentlichte der Astronom und Mathematiker Johannes Kepler (1571 – 1630) ein Büchlein mit dem Titel "Vom sechseckigen Schnee„, dass er seinem Freund und Mentor, dem Prager Hofrat Wackher von Wackenfels (1550 – 1619), als Neujahrsgeschenk widmete. Er entwickelt darin für die damalige Zeit kühne Ideen zum Aufbau der Materie und untersucht unter anderem verschiedene in der Natur auftretende Formen und Muster. Darunter nicht nur die im Titel versprochenen Schneeflocken, sondern auch die Kerne von Granatäpfeln[1], von denen sehr viele auf sehr geringem Raum *gepackt* sind. Dies führte ihn dann zu der Betrachtung von verschiedenen Anordnungen (*Packungen*) sich nicht überlappender, gleich großer Kugeln (z.B. Billardkugeln), und er fragte sich, welches wohl die beste, ökonomischste bzw. dichteste Packung von Kugeln ist. Dabei verstehen wir unter der *Dichte einer Packung*, den Anteil des Raumes, der von den Kugeln überdeckt wird. Hat zum Beispiel eine Packung die Dichte 0,75, dann werden 75% des Raumes von der Packung ausgefüllt bzw. 25% des Raumes wird nicht von den Kugeln überdeckt.

Granatapfel

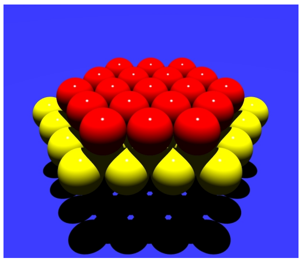
Zurück zu den Granatäpfeln. Die Anordnung der Granatäpfel entspricht nun einer Kugelpackung, die heute als die *fcc*-Packung bekannt ist. Sie ist die natürlichste Anordnung von Kugeln, die man sich vorstellen kann, und man findet sie bei jedem Obsthändler, der seine Orangen oder Äpfel stapelt. Mathematisch exakter lässt sie sich wie folgt beschreiben: Zunächst wird eine Grundschicht von Kugeln konstruiert, in der jede Kugel von sechs anderen Kugeln berührt



Ausschnitt der fcc-Packung

[1]Bildabdruck mit freundlicher Genehmigung von `http://www.flagstaffotos.com.au`

wird. Dadurch entsteht eine sogenannte *hexagonale Packung*. Anschließend wird eine Kopie dieser Schicht auf die Grundschicht gelegt, so dass die Kugeln in die Lücken der Grundschicht fallen. Dieses Stapeln setzt man nun immer weiter fort.



Hexagonale Schichten

Die fcc-Packung findet man häufig in der Natur, z.B. kristallisieren sich auch zahlreiche Kristalle, etwa Gold, Silber, Aluminium gemäß dieser Anordnung. Ihre Dichte ist recht hoch, sie beträgt ungefähr 74%, bzw. ganz genau $\pi/\sqrt{18} = 0,74048...$ Sie ist allerdings nur eine von unendlich vielen Packungen mit dieser Dichte. Kepler war nun überzeugt, dass es keine Packung mit einer größeren Dichte geben kann, und damit war die berühmte Kepler-Vermutung geboren!

Seither hat dieses Problem viel Aufmerksamkeit und Prominenz auf sich gezogen. Viele Helden der Mathematikgeschichte haben sich damit beschäftigt: Carl Friedrich Gauß löste den Spezialfall der *Gitterpackungen*, oder etwa David Hilbert nahm es in seine legendäre Problemsammlung auf, die er im Jahre 1900 auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Paris präsentierte. Aber ein umfassender Beweis dieser doch so offensichtlich richtigen Kepler-Vermutung war lange Zeit nicht in Sicht!

Und heute? Im August 1998 kündigte der Amerikanische Mathematiker T.-C. Hales an, dass seine mehr als siebenjährigen Untersuchungen zur Kepler-Vermutung erfolgreich zum Abschluss gekommen seien. Allerdings beruht der Beweis von Hales sehr stark auf Computerberechnungen, und zwar in einem für mathematische Arbeiten nie gekannten Umfang. Die Begutachtung der Arbeiten von Hales durch Experten hat daher auch mehr als fünf Jahre gedauert, und letztendlich können auch diese Gutachter nicht garantieren, dass alle Computerberechnungen korrekt sind. Und so bleiben doch kleine Zweifel und die Hoffnung, auf eine *schöne computerfreie Lösung*.[2]

Gehen wir noch einmal zurück zum Anfang unserer Geschichte. Dort ging es um die Kerne von Granatäpfeln und davon gibt es sicherlich nur eine gewisse (endliche) Anzahl in einem Apfel. Bei der Kepler-Vermutung haben wir uns aber mit unendlich vielen Kugeln beschäftigt. Somit bleibt eigentlich zu klären, was ist eine dichteste endliche Anordnung von Kugeln. Dies führt uns zu dem recht jungen

[2]Für schöne Lösungen in der Mathematik sei auf „Das Buch der Beweise“ von Martin Aigner und Günter M. Ziegler verwiesen.

mathematischen Gebiet der endlichen Kugelpackungen, dessen erste Anfänge sich bei dem norwegischen Zahlentheoretiker Axel Thue (1863 – 1922) finden. Genauer gesagt, hat Thue sich mit der entsprechenden Problematik in der Ebene auseinandergesetzt, d.h. mit Kreispackungen. Eine Frage ist hier: Wie lassen sich endlich viele (etwa 10) gleich große Kreise (etwa 1 Euro - Stücke) so anordnen, dass der Flächeninhalt ihrer *konvexen Hülle* minimal ist.

Konvexe Hülle von 10 Kreisen

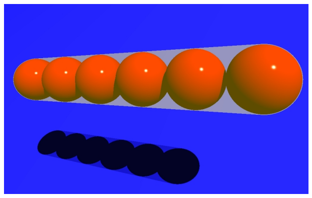
Dabei versteht man unter der konvexen Hülle von z.B. zehn Kreisen, die kleinste konvexe Menge[3], die diese Kreise enthält. Man kann sich dies auch so vorstellen, dass man ein Gummiband so weit auseinander zieht, bis es die Kreise enthält. Dann lässt man es los, und der Bereich, der von dem Band begrenzt wird, ist die konvexe Hülle. Der Flächeninhalt einer solchen konvexen Hülle von Kreisen lässt sich nun elementar berechnen (wie?), und dieser soll minimiert werden. Das obige Bild zeigt übrigens eine optimale Anordnung von 10 Kreisen, und aufgrund von neueren Ergebnissen aus dem Jahre 2007 kennt man auch für „fast alle“Anzahlen von Kreisen die bestmögliche Anordnung.

Was ist zum Beispiel mit 19 Kreisen? Nun in diesem Fall reicht ein Blick in den Magdeburger Dom.

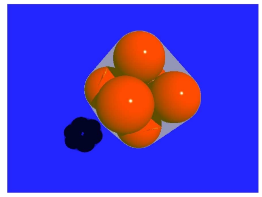
Herrscherpaar im Magdeburger Dom

Dem Volksglauben nach zeigt die Skulptur den Kaiser Otto I. mit seiner ersten Frau Editha. Die Schale in des Kaiser’s Hand beinhaltet 19 Kugeln. Sie sollen ein Symbol für die Himmelssphäre darstellen, sind aber auf alle Fälle optimal angeordnet. So schön und attraktiv dieses Problem in der Ebene, also mit Kreisen, ist, so unzugänglich und katastrophal wird es im Raum mit Kugeln. Hier müssen wir zunächst unser Gummiband aus der Ebene durch eine elastische Hülle ersetzen, und den zu minimierenden Flächeninhalt durch das Volumen.

[3]Eine Menge ist konvex, wenn sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält.



Eine Wurst!



Oktaedrische Packung

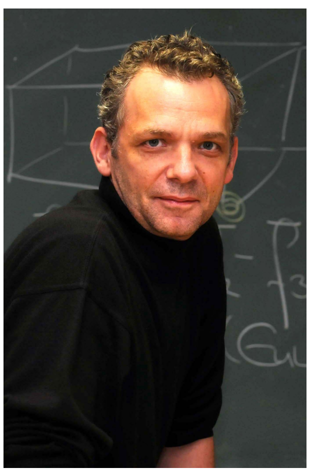
Das nächste Bild links zeigt die konvexe Hülle von 6 Kugeln, deren Mittelpunkte alle auf einer Geraden liegen und je zwei benachbarte Kugeln berühren sich. Solche einfachen (linearen) Anordnung spielen eine spezielle Rolle in der Packungstheorie, und der ungarische Mathematiker László Fejes Tóth (1915–2005) hat ihnen den einprägsamen Namen *Wurstpackungen* oder auch nur *Würste* gegeben, da sie an eine ungarische Salami (weniger an ein Wiener Würstchen) erinnern. Obwohl sie so einfach zu beschreiben sind, sind sie in einigen Fällen recht gute Packungsmengen.

Vergleicht man die Wurst von 6 Kugeln mit der rechts abgebildeten oktaedrischen Anordnung von 6 Kugeln, wobei 4 in einer Ebene sind, dann hat die wurstförmige Anordnung kleineres Volumen - hätten Sie das gedacht? Aber was ist die beste Anordnung von 6 Kugeln? *Vermutlich* ist es die Wurst, und die Mathematiker vermuten, dass für kleine Anzahlen von Kugeln, genauer für weniger als 56, immer eine Wurst bestmöglich ist. Beginnend mit 56 Kugeln sollen clusterförmige Anordnungen (Haufen von Kugeln) optimal sein. Diese plötzliche vermutete Änderung der Gestalt einer optimalen Anordnung hat in der Fachliteratur einen speziellen Namen bekommen: *Wurstkatastrophe*[4]. Zur Zeit ist man aber noch weit davon entfernt, diese Vermutung beweisen zu können, was gewissermaßen auch eine kleine Katastrophe ist.

Auf den ersten Blick mögen die hier beschriebenen Kugelpackungsprobleme ein wenig kurious und künstlich erscheinen. Aber das hier Vorgestellte ist nur ein kleiner Ausschnitt aus der Welt der Packungen, die zahlreiche Anwendungen inner- und außerhalb der Mathematik hat. Ausgehend von den *Würsten*, z.B., hat sich in den 90'er Jahren eine Theorie entwickelt, die sowohl bei der Industrieanfertigung von isolierten mehradrigen Kabeln Anwendung findet, als auch hilft, optimale Konfigurationen im Zusammenhang mit Kristallen oder Microclustern zu erklären. Die Problematik der unendlichen Kugelpackungen wiederum ist u.a. eng verbunden mit der Frage nach optimalen Codes. Dieser Aspekt führt auch zu einem anderen sehr spannenden Kugelpackungsproblem, dem sogenannten *Kußproblem*, das auf einen Streit zwischen Isaac Newton (1643–1727) und David Gregory (1659–1708) zurückgeht. Dies ist aber wieder eine andere Geschichte, die vor langer Zeit begann.

[4] `http://de.wikipedia.org/wiki/Theorie_der_endlichen_Kugelpackungen`

Als ein- und weiterführende Literatur zu der Thematik sei das Buch „Kugelpackungen-Von Kepler bis heute“ von Max Leppmeier empfohlen, das aus mehreren Kursen entstanden ist, die der Autor als Lehrer mit Schülern abgehalten hat. Ein zur Zeit nur in Englisch verfügbares populärwissenschaftliches Buch zur Lösung der Keplervermutung ist George G. Szpiro „Kepler's Conjecture: How Some of the Greatest Minds in History Helped Solve One of the Oldest Math Problems in the World“.


[5]

Mathematik ist nicht nur die Sprache der Natur, sondern immer mehr auch die unseres hochtechnisierten Alltags.

Martin Henk

Otto-von-Guericke Universität Magdbeurg, Fakultät für Mathematik, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg

E-mail address: henk@math.uni-magdeburg.de

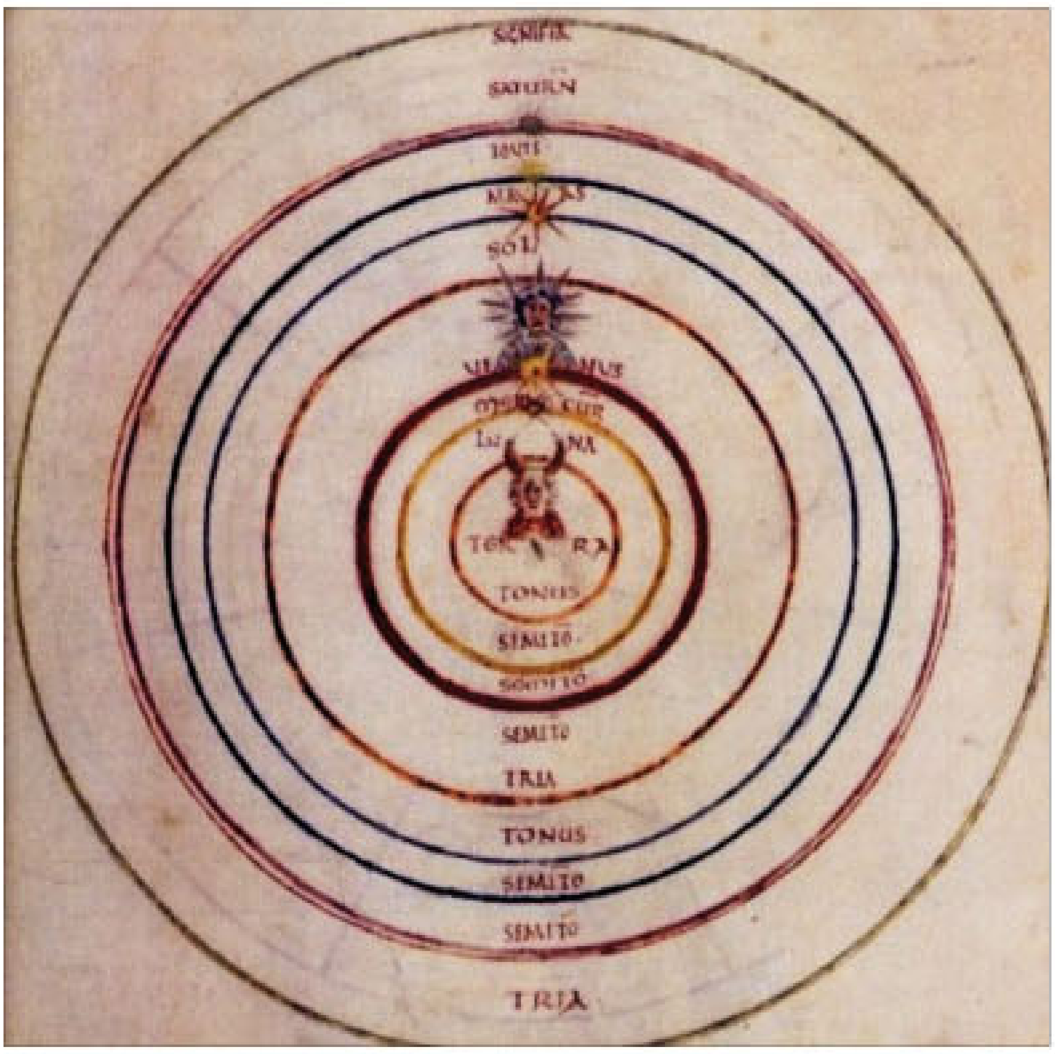
[5]Foto Uli Lücke, *Volksstimme Magdeburg*

 Volkstimme vom 8.03.2008

Wir würfeln einen Walzer

Mathematik ist Überraschung, Abenteuer und Experiment. Professoren der Fakultät für Mathematik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg nehmen das „Jahr der Mathematik" zum Anlass, um dies in einer Beitragsreihe zu veranschaulichen. Im zweiten Teil geht es heute um Würfel, Sphären, Proportionen – kurz: um Mathematik in Tönen.

Von Prof. Dr. Herbert Henning

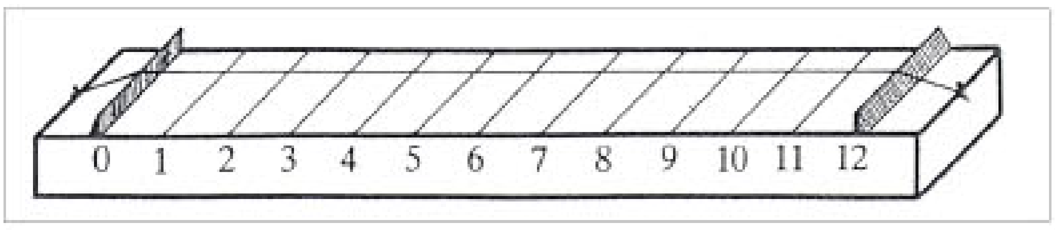


Darstellung der kreisenden Gestirne auf den himmlischen Sphären (von außen nach innen: Fixsterne, Saturn, Jupiter, Mars, Sonne, Venus, Merkur, Mond, Erde) aus dem 9. Jahrhundert. Johannes Kepler (1571-1630) entdeckte die Sphärenmusik als Klang der „himmlischen Gestirne".

Seit es Musik gibt, spielen Zahlen in ihr eine große Rolle. In der Kulturgeschichte sind Zählen und Rechnen als die klassischen Methoden zum „Messen und Ordnen der Welt" beim Erschaffen von Musik angewendet worden. Pythagoras von Samos (um 550 v. Chr.) erkannte, dass die Musik mathematische Grundlagen hat und die Konsonanten, Intervalle Oktave, Quinte, und Quarte auf einfache Zahlenrelationen zurückzuführen sind. Das in Ägypten zwischen 1000 und 500 v. Chr. zur Siebentonleiter weiter entwickelte pentatonische Tonsystem (Fünftonleiter) nahm er als Grundlage seiner Musiktheorie.

Nach Pythagoras definieren Zahlenverhältnisse „Harmonie und göttliche Einsicht". Er entdeckte Zusammenhänge zwischen den Grundbestandteilen der klingenden Musik, den Rhythmusstrukturen, Tonhöhen und Abständen (= Intervalle) zwischen ihnen. Dazu erfand er das Monochord. Es bestand aus einer Saite, die zwischen zwei Stegen gespannt war und mittels eines dritten Stegs auf verschiedene Weise in zwei Teile geteilt wurde, so dass die beiden Saitenabschnitte je nach Länge immer wieder andere Tonhöhen erzeugen.

Die Saitenteilung 1:1 ergibt den Grundton, die Saitenteilung 1:2 die Oktave, 2:3 die Quinte, 3:4 die Quarte. Diese drei grundlegenden Proportionen aus den Zahlen 1, 2, 3, und 4, die die Harmonie in der Musik begründen, bildeten für Pythagoras die Grundlage seiner Auffassung, dass das „Göttliche in der Welt" durch einfache Zahlenverhältnisse beschrieben werden kann. Es beschreibt in der Musik die „pythagoräische Stimmung".



Um die Entsprechung von Ton und Zahl zu demonstrieren, benutzte man seit Pythagoras von Samos (um 550 v.Chr.) das Monochord, einen Resonanzkasten mit darübergespannter Saite. Das Monochord ist somit das erste Saiteninstrument überhaupt.

„Musik ist eine arithmetische Übung der Seele"

Zur Bedeutung der Proportionen, von Maß und Zahl gehörte auch die Vorstellung, dass die Planetenbahnen nach harmonischen Proportionen geordnet sind und dabei die Sphärenmusik erzeugen.

Der deutsche Astronom und Physiker Johannes Kepler (1571–1630) hat die Idee der Sphärenmusik weiter ausgebaut. Johannes Kepler ging davon aus, dass geometrische Figuren „Gottes Gedanken" waren und dass die Wahrheit in der Sphärenharmonie liege. In seinem Werk „Harmonices mundi" (1619) begründete er den Zusammenhang zwischen kosmischen, physikalischen und musikalischen Harmonien.

Er entdeckte, dass die Tagesbögen als Winkel, der pro Tag von einer gedachten Verbindungslinie zwischen Sonne und Planet überstrichen wird, im Aphel (sonnenfernster Punkt auf einer elliptischen Planetenbahn) und im Perihel (sonnennächster Punkt) im Verhältnis den harmonischen musikalischen Intervallen entsprechen. Mit geringen Abweichungen bedeutet dies für die Planeten Saturn ein Verhältnis 4:5 (große Terz), Jupiter 5:6 (kleine Terz), Mars 2:3 (Quinte). Er leitete aus der pythagoräischen Idee von den „himmlischen Harmonien" auch seine berühmten Planetengesetze der Himmelsmechanik ab.

Im Barock findet man in den Kompositionen oft zahlensymbolische Bezüge, biografische Aspekte der Komponisten, Monogramme und textbezogene Querverbindungen vor allem durch die Wahl der Taktart, Anzahl der Takte, Anzahl der Gliederungsteile, Intervallstrukturen (Sekunde = 2, Terz = 3), Anzahl der Töne einer Melodie realisiert.

In den Kompositionen Johann Sebastian Bachs finden sich immer wieder Bezüge zur Zahl 14.

Wolfgang Amadeus Mozart komponierte etliche Menuette und Walzer nach erwürfelten Zahlen.

Richard Wagner nutzte bei „Tristan" den „Goldenen Schnitt" als harmonische Zahlenkombination.

Auszug aus der Partitur des „Musikalischen Würfelspiels" von Mozart. J. Ph. Kirnberger beschrieb 1754 Mozart als einen „allzeit fertige Polonaisen- und Menuettencomponist".

In Werken Johann Sebastian Bachs findet man immer wieder Bezüge zur Zahl 14, die aus dem Zahlenalphabet des Namens B.A.C.H. resultiert und in Melodien und Taktzahlen auftreten. Es gibt bei Johann Sebastian Bach „symbolische" Einflechtungen abstrakter Zahlen in Musikstücke, wie zum Beispiel die 7 („Heilige Zahl") oder 12 („Zahl der Apostel"). Ein Beispiel ist das Credo in seiner H-Moll-Messe. Das Credo erklingt 49 mal (7 mal 7), das „in unum deum" erklingt 84 mal (7 mal 12) und das „et incarnatus" 19 mal (7 + 12). Die Fuge „Patreus omnipotentem" hat genau 84 Takte (7 mal 12). „Die Musik ist eine arithmetische Übung der Seele, die nicht weiß, dass sie mit Zahlen umgeht", nannte das Johann Gottfried Leibniz.

Ein musikalisches Würfelspiel, wie es im 18. Jahrhundert zum „Componieren" verwendet wurde, beruhte auf Zahlenkombinationen, die mit Hilfe von zwei Würfeln gebildet wurden. Eine Tabelle verwies auf Takte in einem dazugehörigen Notenblatt. Sie war so aufgebaut, dass ihre Zeilen sich auf die gewürfelten Augenzahlen und die Spalten auf die Reihenfolge des Würfelns bezogen. Würfelte man zum Beispiel eine bestimmte Augensumme, dann wurde der dazugehörige Takt aus dem Notenblatt der erste Takt der neuen Komposition. So setzte sich nach und nach die neue Komposition „zufällig" zusammen

Das „Geheimnis" dieser Würfelkompositionen, die auch Wolfgang Amadeus Mozart für zahlreiche Walzer und Menuette nutzte ist einfach. Im Grunde handelt es sich dabei immer um periodische, gleichförmige Stücke, wie Menuette, Walzer oder Polonaisen. Zunächst wurde eine Vorlage komponiert und danach fünf (bei einem Würfel) oder 10 (bei zwei Würfel) Variationen über das gleiche harmonische Schema erstellt. So wurden die Takte zwischen den Variationen austauschbar und es konnte „ausgewürfelt" werden, welcher Takt von welcher Variation pro Takt gespielt wird. Es veränderte sich immer nur die rhythmische und melodische Linie über einem gleich bleibenden Modell.

Bei diesen Würfelspielen „spielte" der Zufall eine Rolle. Die Summen der Augenzahlen beider Würfel waren Zufallszahlen.

Im 20. Jahrhundert erhielt das Komponieren durch den Einfluss von Zahlen, seriellen Zahlenreihen, Zahlenkombinationen und Zahlenmengen eine neue Bedeutung. Dabei gewannen statistische Verfahren und stochastische Methoden, wie das Komponieren mit Markov – Ketten, Baumstrukturen und „Sieben" an Bedeutung. Es entstand die „serielle Musik".

„Mathematik als Musik des Verstandes"

Der für „Harmonie und Schönheit" stehende „Goldene Schnitt" als ein irrationales Zahlenverhältnis und die von Leonardo von Pisa im 13. Jahrhundert entdeckten Fibonacci-Zahlen bestimmten die Kompositionstechnik von Béla Bártok, Gyorgi Legiti, Pierre Boulez, Luigi Nono, Iannis Xenakis, Peter Maxwell Davies und Karl-Heinz Stockhausen.

Die Reihe der Fibonaccizahlen entsteht, wenn zu einer Zahl die vorige Zahl addiert wird. Beginnend mit 0 entsteht so die Zahlenfolge: 0,1,1,2,3,5,8, 13,21,34,55,89,144,233,377,610 ... Bildet man die Quotienten zweier aufeinander folgender Zahlen, so nähert sich der Grenzwert der „Goldenen Schnitt"- Zahl 1,6163... an.

Veranstaltungen

Wissenschaftsjahr 2008
Mathematik
Alles, was zählt

- **17. April** (Start): CineMath – Filmfestival: Filme, Diskussionen, Treffen (u.a. mit „Good Will Hunting", „A Beauteful Mind", „Enigma"), Kulturzentrum Moritzhof, Magdeburg
- **22. April** (Start): Geheime Botschaften im 1. Buch Mose – der „Bibelcode" (Vortragsreihe „Der mathematische Blick"), 17 Uhr, Festung Mark Magdeburg
- **8. Mai** (Start): „Math helps!" – eine mobile MatheKlinik unterwegs, Tipps und Tricks bei der Lösung mathematischer Probleme für Anfänger und Fortgeschrittene

Bei Karl-Heinz Stockhausen (1928 bis 2007), einem Vertreter der „seriellen Musik", ist das Klavierstück IX auf der Folge der Fibonacci-Zahlen und deren Ableitung aufgebaut. Die Anzahl der Wiederholungen des Anfangsakkords wird durch die Fibonacci-Folge bestimmt. Zu Beginn sind es 142 Wiederholungen, beim zweiten Einsatz noch 87, und dann bei jedem Einsatz in absteigender Folge 53, 32, 19, 11, 6, 3 und 1 (Fibonacci-Folge).

Auch bei Richard Wagner findet man Beziehungen zum „Goldenen Schnitt" und zu den Fibonaccizahlen. Das Vorspiel zu „Tristan und Isolde" ist in A-Moll komponiert. In Takt 43 wechselt die Tonart zu A-Dur und in Takt 71 wieder zu A-Moll. Der Wechsel der Tonarten nach einem „Muster" führt als Erklärung auf den „Goldenen Schnitt" als harmonisches Zahlenverhältnis.

Bleibt als ein Fazit ein Ausspruch des englischen Mathematikers John James Sylvester (1814 bis 1897): „Könnte nicht die Musik beschrieben werden als die Mathematik des Gefühls und die Mathematik als Musik des Verstands? Beide haben die gleiche Seele! So fühlt denn der Musiker Mathematik und der Mathematiker denkt Musik."

Nächste Folge am 7. April: „Mathematik ist die Kunst, das Rechnen zu vermeiden" von Professor Gerald Warnecke

,, Ich würfele einen Walzer!”
Sphären, Proportionen und ,,hörbare” Mathematik

Herbert Henning

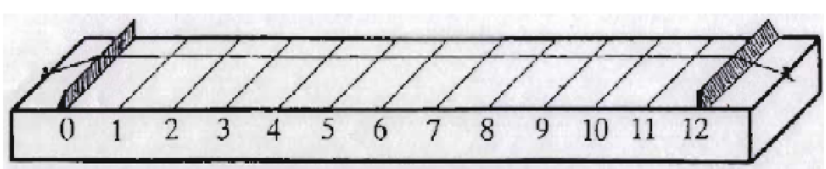
Seit es Musik gibt, spielen Zahlen in ihr eine große Rolle. In der Kulturgeschichte sind Zählen und Rechnen als die klassischen Methoden zum ,,Messen und Ordnen der Welt” beim Erschaffen von Musik angewendet worden.

Pythagoras von Samos (um 550 v. Chr.) erkannte, dass die Musik mathematische Grundlagen hat und die Konsonanten, Intervalle, Oktave, Quinte und Quarte auf einfache Zahlenrelationen zurückzuführen sind.

Pythagoras

Das in Ägypten zwischen 1000 und 500 v. Chr. zur Siebentonleiter weiter entwickelte pentatonische Tonsystem (Fünftonleiter) nahm er als Grundlage seiner Musiktheorie, in der Mathematik und Religion eine Einheit bildeten. Nach Pythagoras von Samos definieren Zahlenverhältnisse ,,Harmonie und göttliche Einsicht”. Er entdeckte Zusammenhänge zwischen den Grundbestandteilen der klingenden Musik, den Rhythmusstrukturen, Tonhöhen und Abständen (= Intervalle) zwischen ihnen.

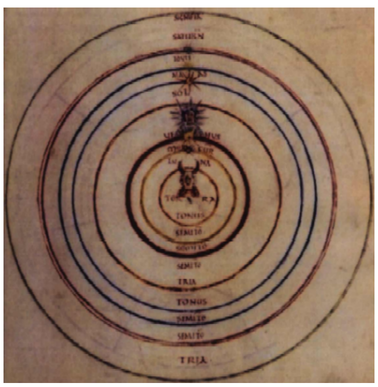
Dazu erfand er das Monochord. Es bestand aus einer Saite, die zwischen zwei Stegen gespannt war und mittels eines dritten Stegs auf verschiedene Weise in zwei Teile geteilt wurde, so dass die beiden Saitenabschnitte je nach Länge immer wieder andere Tonhöhen erzeugen. Die Saitenteilung 1 : 1 ergibt den Grundton, die Saitenteilung 1 : 2 die Oktave, 2 : 3 die Quinte, 3 : 4 die Quarte. Diese drei grundlegenden Proportionen aus den Zahlen 1, 2, 3 und 4, die die Harmonie in der Musik begründen, bildeten für Pythagoras die Grundlage seiner Auffassung, dass das ,,Göttliche in der Welt” durch einfache Zahlenverhältnisse beschrieben werden kann. Es beschreibt in der Musik die ,,pythagoräische Stimmung”.



Monochord

,,Die Sonne tönt nach alter Weise im Brudersphären Wettgesang ...” (Goethe)

Zur Bedeutung der Proportionen von Maß und Zahl gehörte auch die Vorstellung, dass die Planetenbahnen nach harmonischen Proportionen geordnet sind und dabei die Sphärenmusik erzeugen. Der deutsche Astronom und Physiker Johannes Kepler (1571 bis 1630) hat die Idee der Sphärenmusik weiter ausgebaut. Johannes Kepler ging davon aus, dass geometrische Figuren ,,Gottes Gedanken” waren und dass die Wahrheit in der Sphärenharmonie liege. In seinem Werk ,,Harmonices mundi” (1619) begründete er den Zusammenhang zwischen kosmischen, physikalischen und musikalischen Harmonien.

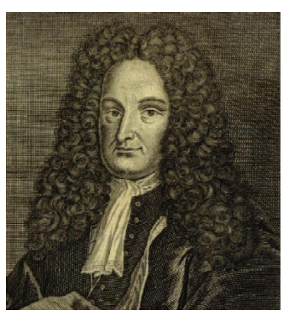


Kepler

Er entdeckte, dass die Tagesbögen als Winkel, der pro Tag von einer gedachten Verbindungslinie zwischen Sonne und Planet überstrichen wird, im Aphel (sonnenfernster Punkt auf einer elliptischen Planetenbahn) und im Perihel (sonnennächster Punkt) im Verhältnis den harmonischen musikalischen Intervallen entsprechen. Mit geringen Abweichungen bedeutet dies für die Planeten Saturn ein Verhältnis 4 : 5 (großer Terz), Jupiter 5 : 6 (kleine Terz), Mars 2 : 3 (Quinte).

Er leitete aus der pythagoräischen Idee von den ,,himmlischen Harmonien” auch seine berühmten Planetengesetze der Himmelsmechanik ab.

,,Die Musik ist eine arithmetische Übung der Seele, die nicht weiß, dass sie mit Zahlen umgeht.” (Johann Gottfried Leibniz)



Leibniz

Im Barock findet man in den Kompositionen oft zahlensymbolische Bezüge, biografische Aspekte der Komponisten, Monogramme und textbezogene Querverbindungen vor allem durch die Wahl der Taktart, Anzahl der Takte, Anzahl der

Gliederungsteile, Intervallstrukturen (Sekunde = 2, Terz = 3), Anzahl der Töne einer Melodie realisiert.

In Werken Johann Sebastian Bachs findet man immer wieder Bezüge zur Zahl 14, die aus dem Zahlenalphabet des Namens B.A.C.H resultieren und in Melodien und Taktzahlen auftreten. Es gibt bei Johann Sebastian Bach ,,symbolische" Einflechtungen abstrakter Zahlen in Musikstücke, wie zum Beispiel die Zahlen 7 (,,Heilige Zahl") oder 12 (,,Zahl der Apostel"). Ein Beispiel ist das Credo in seiner H-Moll-Messe. Das Credo erklingt 49 mal (7 mal 7), das ,,in unum deum" erklingt 84 mal (7 mal 12) und das ,,et incarnatus" 19 mal (7 + 12). Die Fuge ,,Patreus omnipotentem" hat genau 84 (7 mal 12) Takte.

Bach

,,Wir würfeln einen Walzer!"

Ein musikalisches Würfelspiel, wie es im 18. Jahrhundert zum ,,Componieren" verwendet wurde, beruhte auf Zahlenkombinationen, die mit Hilfe von zwei Würfeln gebildet wurden. Eine Tabelle verwies auf Takte in einem dazugehörigen Notenblatt. Sie war so aufgebaut, dass ihre Zeilen sich auf die gewürfelten Augenzahlen und die Spalten auf die Reihenfolge des Würfelns bezogen. Würfelte man zum Beispiel eine bestimmte Augensumme, dann wurde der dazugehörige Takt aus dem Notenblatt der erste Takt der neuen Komposition. So setzte sich nach und nach die neue Komposition ,,zufällig" zusammen. Das ,,Geheimnis" dieser Würfelkompositionen, die auch Wolfgang Amadeus Mozart für zahlreiche Walzer und Menuette nutzte, ist einfach. Im Grunde handelt es sich dabei immer um periodische, gleichförmige Stücke, wie Menuette, Walzer oder Polonaisen. Zunächst wurde eine Vorlage komponiert und danach fünf (bei einem Würfel) oder 10 (bei zwei Würfeln) Variationen über das gleiche harmonische Schema erstellt. So wurden die Takte zwischen den Variationen austauschbar und es konnte ,,ausgewürfelt" werden, welcher Takt von welcher Variation pro Takt gespielt wird. Es veränderte sich immer nur die rhythmische und melodische Linie über einem gleich bleibenden Modell. Bei diesen Würfelspielen ,,spielte" der Zufall eine Rolle. Die Summen der Augenzahlen beider Würfel waren Zufallszahlen.

Mozart

Würfelspiel

Zahlen kann man ,,hören”

Im 20. Jahrhundert erhielt das Komponieren durch den Einfluss von Zahlen, seriellen Zahlenreihen, Zahlenkombinationen und Zahlenmengen eine neue Bedeutung. Dabei gewannen statistische Verfahren und stochastische Methoden, wie das Komponieren mit Markov-Ketten, Baumstrukturen und ,,Sieben” an Bedeutung. Es entstand die ,,serielle Musik”. Der für ,,Harmonie und Schönheit” stehende ,,Goldene Schnitt” als ein irrationales Zahlenverhältnis und die von Leonardo von Pisa im 13. Jahrhundert entdeckten Fibonacci-Zahlen bestimmten die Kompositionstechnik von Bela Bartok, Gyorgi Legiti, Pierre Boulez, Luigi Nono, Iannis Xenakis, Peter Maxwell Davies und Karl-Heinz Stockhausen. Die Reihe der Fibonaccizahlen entsteht, wenn zu einer Zahl die vorige Zahl addiert wird. Beginnend mit 0 entsteht so die Zahlenfolge:

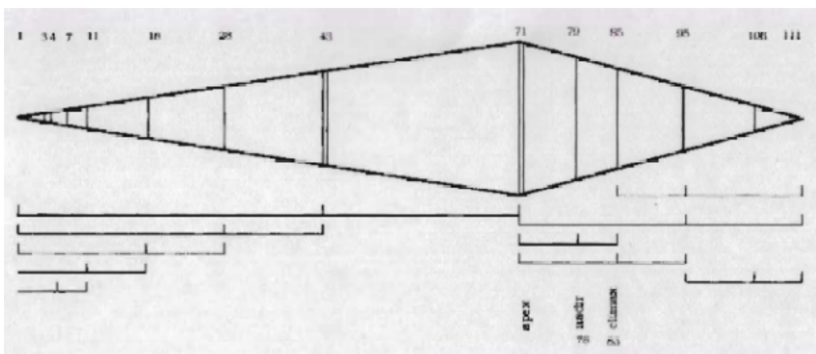
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610 etc.

Bildet man die Quotienten von zwei aufeinander folgenden Zahlen, so nähert sich der Grenzwert der ,,Goldenen Schnitt”-Zahl 1,6168 ... an. Bei Karl-Heinz Stockhausen (1928 bis 2007), einem Vertreter der ,,seriellen Musik”, ist das Klavierstück IX auf der Folge der Fibonacci-Zahlen und deren Ableitung aufgebaut. Die Anzahl der Wiederholungen des Anfangsakkords wird durch die Fibonacci-Folge bestimmt. Zu Beginn sind es 142 Wiederholungen, beim zweiten Einsatz noch 87 und dann bei jedem Einsatz in absteigender Folge 53, 32, 19, 11, 6, 3 und 1 (Fibonacci-Folge).

Auch bei Richard Wagner findet man zum Beispiel im Vorspiel zu ,,Tristan und Isolde” Beziehungen zum ,,Goldenen Schnitt” und zu den Fibonaccizahlen bei der Analyse der Tonlängen und Taktfolgen.

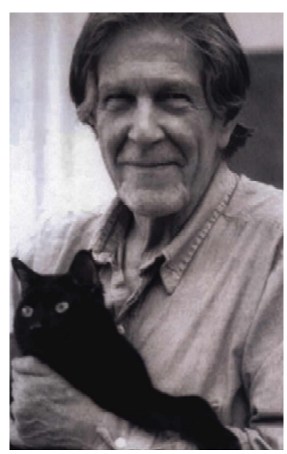
Wagner

Das Vorspiel zu ,,Tristan und Isolde" ist in A-Moll komponiert. In Takt 43 wechselt die Tonart zu A-Dur und in Takt 71 wieder zu A-Moll. Der Wechsel der Tonarten nach einem ,,Muster" führt als Erklärung auf den ,,Goldenen Schnitt" als harmonisches Zahlenverhältnis. In der Partitur teilt der ,,Doppelstrich" nach Takt 70 die 111 Takte im Verhältnis 1 : 1,630 ... und der erste ,,Doppelstrich" nach Takt 42 macht dasselbe mit den ersten 70 Takten. Bei Takt 68 erreicht das Vorspiel seinen Höhepunkt. Der Takt 68 ergibt sich aus (Takt) 111 mal 0,63 = 68,3.



Mathematik und Musik

Der amerikanische Komponist John Cage (1912 bis 1992) produzierte seine Musik mit Hilfe des Zufalls und der Erzeugung von Zufallszahlen, wie es bereits Mozart bei seiner ,,Würfelmusik" gemacht hatte. In der Klavierkomposition ,,Music of Changes" verwendete er ein Verfahren zur Erzeugung der Zufallszahlen nach dem chinesischen I-Ching und eine Tafel mit 88 zufällig angeordneten Zahlenquadraten. Besonders auffällig ist sein Bezug zur Verwendung von Zufallszahlen als ,,Modell" bei seiner Komposition Harpsichord für 1 - 7 Cembali und 1 - 52 computergenerierte Tonbänder.



John Cage

Die in Deutschland lebende rumänische Komponistin und Musikwissenschaftlerin Violeta Dinescu fasste die Beziehung zwischen Mathematik und Musik in der Feststellung zusammen:

Violeta Dinescu

„Man sollte reichhaltige Beziehungen zwischen Mathematikdenken und dem Musikdenken entwickeln und kultivieren. ... Wichtig ist für die Musik die Möglichkeit, mit Hilfe der Mathematik ein einheitliches Ganzes beschreiben zu können. ... Man kann die musikalischen Elemente auf ganz unterschiedliche Weise zu kleineren und umfassenderen Sinneinheiten kombinieren."

Bleibt als Fazit ein Ausspruch des englischen Mathematikers John James Sylvester (1814 bis 1897):

Könnte nicht die Musik beschrieben werden als die Mathematik des Gefühls und die Mathematik als Musik des Verstandes? Beide haben die gleiche Seele! So fühlt denn der Musiker Mathematik und der Mathematiker denkt Musik.

Mathematik ist die Kunst, das Rechnen zu vermeiden

Mathematik ist Überraschung, Abenteuer und Experiment. Professoren der Fakultät für Mathematik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg nehmen das „Jahr der Mathematik“ zum Anlass, um dies in einer Beitragsreihe zu veranschaulichen. Im dritten Teil geht es heute darum, dass Mathematik die Kunst ist, das Rechnen zu vermeiden – und wie der Braunschweiger Carl Friedrich Gauß dies einst eindrucksvoll nachgewiesen hat.

Von **Prof. Dr. Gerald Warnecke**

Carl Friedrich Gauß, geboren 1777 in Braunschweig, gestorben 1855 in Göttingen, war einer der bedeutendsten Mathematiker. Von 1990 bis zum Ende der D-Mark 2001, zierte sein Porträt den Zehnmarkschein. Abgebildet sind außerdem der Graph und die Formel der nach ihm benannten Normalverteilung, die häufig in der Natur zu beobachten ist. Im Hintergrund ist eine Ansicht von Göttingen, wo er studierte und ab 1807 Professor und Direktor der Sternwarte war.

In diesem Jahr wurde der neue Höchstleistungsrechner JUGENE mit 65 536 Prozessoren in Jülich eingeweiht. Er ist zurzeit der zweitschnellste Rechner der Welt und der schnellste zivil genutzte Rechner. Schneller ist nur einer in den USA, der zur Weiterentwicklung von Nuklearwaffen eingesetzt wird.

Solch ein Rechner kostet nicht nur Millionen Euro in Anschaffung und Betrieb, er ist auch von einer großen Gruppe von Technikern und Wissenschaftlern umgeben, die ihn betreiben und nutzen.

Die Rechenleistung von JUGENE, gemessen an Beispielaufgaben, die auf allen großen Rechnern zum Vergleich ausprobiert werden, liegt bei 167 Teraflops. „Flops“ ist die englische Abkürzung für „floating point operations per second“. Das sind 167 Billionen oder in Ziffern

167 000 000 000 000

Gleitkomma-Rechenschritte (Additionen, Multiplikationen usw.) pro Sekunde. Dabei besteht bei diesen Vergleichsrechnungen eine Gleitkommazahl aus 20 Ziffern. Wir brauchen deutlich mehr als eine Sekunde für einen einzigen Gleitkomma-Rechenschritt. Nehmen wir trotzdem an, dass wir ihn in einer Sekunde durchführen könnten, bräuchten wir ohne Schlaf mehr als 5 Millionen Jahre für diese 167 Billionen Rechenschritte. Der Rechner kann somit in einer Sekunde unvorstellbar viel berechnen, aber auch ebensoviel Datenschrott, also Flops anstelle von „Flops“, liefern, wenn das Berechnungsverfahren fehlerhaft ist.

Die Rechenleistung der Programme, die auf diesen Rechnern laufen, hängt einmal von der oben beschriebenen Schnelligkeit der Rechenleistung ab, aber auch davon, dass die verwendeten Programme die schnellsten Rechenverfahren (Algorithmen) und Formeln nutzen, um das Ergebnis zu erzielen. An der Weiterentwicklung von beidem ist die Mathematik sehr stark beteiligt. Wir wollen hier nur die Rechenverfahren näher betrachten.

Ein gutes Beispiel ist die Erzählung, die über den berühmten Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777-1855) verbreitet wird. In der Grundschule wollte der Lehrer die Klasse während der Unterrichtsstunde für eine längere Zeit beschäftigen und stellte die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Nach kurzer Zeit nannte ihm Gauss, der schon in diesem Alter hervorragend im Kopf rechnen konnte, die Lösung.

sdfgsdfgsdfgsfg sdfgsdfgsdfg

Er hatte festgestellt, dass 100+1= 101, 99+2=101, usw. bis 50+51= 101 gilt. Das sind genau 50 × 101 = 5050. Sicherlich hat Gauss dabei schnell erkannt, dass sein Verfahren sich auch allgemeiner für das Aufaddieren der Zahlen von 1 bis N für gegebenes N anwenden lässt. Bezeichnen wir im folgenden mit ??(N)=1+2+ …+N die Summe der ersten N natürlichen Zahlen, so lautet die allgemeine von Gauss gefundene Formel

??(N) = N×(N+1)/2.

Gauß stammte aus Magdeburgs Partnerstadt Braunschweig und war ab 1990 auf dem Zehnmarkschein abgebildet. Die Erzählung ist geschichtlich nicht belegbar, aber trotzdem schön. An diesem einfachen Beispiel sehen wir einige Dinge, die Mathematikern sehr wesentlich sind.

Erstens fragen wir uns bei komplizierten und langwierigen Berechnungen, ob es nicht auch einfacher und schneller geht. Monotones Rechnen ist langweilig. Schnelle Schüler brauchen für die Zahlen von 1 bis 100 ohne Taschenrechner mehr als 10 Minuten, wenn sie tatsächlich alle 100 Zahlen einzeln addieren, mit einem Taschenrechner vielleicht 2 Minuten. Mit der Formel sind es nur wenige Sekunden. Die Formel ist somit dem monotonen Rechnen überlegen.

Zweitens ist aufgrund der Einfachheit der Formel das Rechenergebnis weniger fehleranfällig.

Drittens ist die Formel sehr günstig, wenn die Zahl N sehr groß wird. Dann braucht man selbst mit dem Taschenrechner sehr lange, während der Aufwand mit der Formel nur langsam steigt. Für N = 1 Million braucht man selbst mit dem Taschenrechner fast 2 Monate ohne Pause, wenn man es schafft jede Addition in durchschnittlich 5 Sekunden einzutippen. Mit der Formel dauert es vielleicht 15 Sekunden. Der Aufwand bei Verwendung der Formel wächst nur mit der Zahl der Dezimalstellen, das heißt wie der Logarithmus zur Basis 10, er beträgt also circa 2× log(N). Bei einer Million ergibt das 12, bei 100 nur 4. Bei den Additionen wächst der Aufwand stärker als N, da die Zahl der Dezimalstellen immer größer wird, wenn man bei 1 anfängt und die Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge aufaddiert.

Die Untersuchung des Verhaltens von Berechnungsverfahren für große N wird als Komplexitätstheorie bezeichnet. Diese Theorie gilt zwar als Teilgebiet der theoretischen Informatik, methodisch ist es aber ein Gebiet der Mathematik auf dem auch viele Mathematiker forschen. Auf diesem Gebiet gibt es ein berühmtes Problem, das P/NP Problem, für dessen Lösung das Clay Mathematics Institute eine Million US-Dollar Preisgeld ausgesetzt hat. (siehe http:// www. claymath.org/millennium/)

Viertens ist die Formel sehr zuverlässig. Sie gilt für alle natürliche Zahlen N. Man kann dieses auch einfach mathematisch mit dem sogenannten Prinzip der vollständigen Induktion beweisen. Die Formel gilt für N=1, also ??(1)=1. Wir nehmen an, sie gilt für ein N und zeigen, dass sie dann auch für N+1 gilt. Dafür müssen wir nur ??(N+1) = ??(N)+N+1 zeigen was leicht auszurechnen ist Wenn das gezeigt ist, gilt sie für N=1, somit gilt sie auch fü N=2, N=3 usw.

Um zu dem Großrechner JUGENE zurückzukommen. Viele Rechenprogramme lösen seh intensiv große lineare Gleichungssysteme. Es gibt Schätzungen, dass dafür ein erheblicher Teil der Rechenleistung weltweit verwendet wird. Deshalb werden für den Rechnervergleich sogenannte Linpack-Verfahren herangezogen die genau solche Lösungsverfahren enthalten.

sdfghdfghdfhgd dfghdfghfdgh

Auch auf diesem Gebiet ha Gauß sowohl mit dem Gaußschen-Algorithmus als auch mit einem iterativen Verfahre wesentliche Beiträge geleistet Er selbst musste in seiner Berufstätigkeit auf den Gebieter der Landvermessung und de Astronomie viel praktisch rechnen und war deshalb a praktischen Verfahren sehr interessiert. Auf der Brockenspitze erinnert eine Plakette daran, dass Gauß von dort au Messungen vornahm für eine Triangulierung des Königreich Hannover, an der er beteilig war. Damals war es nicht einfach die Höhe des Brocken ode die geographische Länge und Breite von Braunschweig zu bestimmen. Dieses geschah mi einer Kombination aus genauen Messungen und mathematischen Berechnungen.

Die heutige mathematische Forschung ist sehr vielseitig und geht weit über die Betrachtung von Berechnungsverfahren hinaus. Aber schnelle, einfache Verfahren sowie der Beweis, dass solche Verfahren das richtige Ergebnis liefern, ist eines der zentraler Anliegen der Mathematik, das in Magdeburg in Lehre und Forschung stark vertreten ist Es werden hier auf den Gebieten der Diskreten Optimierung und der Numerik Partieller Differentialgleichungen vielfältige Verfahren und derer Anwendung in Medizin und Technik untersucht.

Nächste Folge am 17. Mai „Mathematik in GPS und UTMS“ von Prof. Dr. Alexander Pott

Veranstaltungen

Wissenschaftsjahr 2008
Mathematik
Alles, was zählt

- **17. April** (Auftakt): CineMath – Filmfestival: Filme, Diskussionen, Treffen (u.a. mit „Good Will Hunting“, „A Beautiful Mind“, „Enigma“), Kulturzentrum Moritzhof, Magdeburg
- **22. April** (Auftakt): Geheime Botschaften im 1. Buch Mose – der „Bibelcode“ (Vortragsreihe „Der mathematische Blick“), 17 Uhr, Festung Mark Magdeburg
- **8. Mai** (Auftakt): „Mathe helps!“ – eine mobile MatheKlinik unterwegs, Tipps und Tricks bei der Lösung mathematischer Probleme für Anfänger und Fortgeschrittene

MATHEMATIK IST DIE KUNST DAS RECHNEN ZU VERMEIDEN

GERALD WARNECKE

Mathematik ist Überraschung, Abenteuer und Experiment. Professoren der Fakultät für Mathematik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg nehmen das ,,Jahr der Mathematik" zum Anlass, um dies in einer Beitragsreihe zu veranschaulichen. Im dritten Teil geht es heute darum, dass Mathematik die Kunst ist, das Rechnen zu vermeiden - und wie der Braunschweiger Carl Friedrich Gauß dies einst eindrucksvoll nachgewiesen hat.

In diesem Jahr wurde der neue Höchstleistungsrechner JUGENE mit 65.536 Prozessoren in Jülich eingeweiht. Nach einem Rechner in den USA ist er zurzeit [März 2008] der zweitschnellste der Welt und der schnellste zivil genutzte Rechner. Solch ein Rechner kostet nicht nur Millionen Euro in Anschaffung und Betrieb, er ist auch von einer Gruppe von Technikern und Wissenschaftlern umgeben, die ihn betreiben und nutzen. Die Rechenleistung von JUGENE, gemessen an Beispielaufgaben, die auf allen großen Rechnern zum Vergleich ausprobiert werden, liegt bei 167 Terraflops.

Der Supercomputer im Forschungszentrum Jülich in der Nähe von Köln ist der zweitschnellste Computer der Welt. Die kürzlich hier installierte Anlage namens JUGENE schafft 167 Billionen Rechenschritte pro Sekunde (Teraflops). Das entspricht der Leistung von etwa 20 000 PCs. Die hier rechts als Modell gezeigte Halle ist so ausgelegt, dass sie flexibel auch kommenden Rechnergenerationen Platz bietet.

„FLOPS" ist die englische Abkürzung für ,,floating point operations per second". Das sind 167 Billionen oder in Ziffern

167 000 000 000 000

Rechenschritte (Additionen, Multiplikationen usw.) pro Sekunde. Dabei besteht bei diesen Vergleichsrechnungen eine Zahl aus 20 Ziffern.

Carl Friedrich Gauß, geboren 1777 in Braunschweig, gestorben 1855 in Göttingen, war einer der bedeutendsten Mathematiker. Von 1990 bis zum Ende der D-Mark 2001, zierte sein Porträt den Zehnmarkschein. Abgebildet sind außerdem der Graph und die Formel der nach ihm benannten Normalverteilung, die häufig in der Natur zu beobachten ist. Im Hintergrund ist eine Ansicht von Göttingen, wo er studierte und ab 1807 Professor und Direktor der Sternwarte war.

Wir brauchen deutlich mehr als eine Sekunde für einen einzigen Rechenschritt. Nehmen wir trotzdem an, dass wir ihn in einer Sekunde durchführen könnten, bräuchten wir ohne Schlaf mehr als 5 Millionen Jahre für diese 167 Billionen Rechenschritte. Der Rechner kann somit in einer Sekunde unvorstellbar viel berechnen, aber auch ebensoviel Datenschrott, also Flops anstelle von ,,flops", liefern, wenn das Berechnungsverfahren fehlerhaft ist. Die Rechenleistung der Programme, die auf diesen Rechnern laufen, hängt einmal von der oben beschriebenen Schnelligkeit der Rechenleistung ab, aber auch davon, dass die verwendeten Programme die schnellsten Rechenverfahren (Algorithmen) und Formeln nutzen, um das Ergebnis zu erzielen. An der Weiterentwicklung von beidem ist die Mathematik sehr stark beteiligt. Wir wollen hier nur die Rechenververfahren näher betrachten. Ein gutes Beispiel ist die Erzählung, die über den berühmten Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777-1855) verbreitet wird. In der Grundschule wollte der Lehrer die Klasse während der Unterrichtsstunde für eine längere Zeit beschäftigen und stellte die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Nach kurzer Zeit nannte ihm Gauß, der schon in diesem Alter hervorragend im Kopf rechnen konnte, die Lösung. Er hatte festgestellt, dass $100 + 1 = 101$, $99 + 2 = 101$, usw. bis $50 + 51 = 101$ gilt. Das sind genau $50 \times 101 = 5050$. Sicherlich hat Gauss dabei schnell erkannt, dass sein Verfahren sich auch allgemeiner für das Aufaddieren der Zahlen von 1 bis N für gegebenes N anwenden lässt. Bezeichnen wir im folgenden mit $\Sigma(N) = 1 + 2 + ... + N$ die Summe der ersten N natürlichen Zahlen, so lautet die allgemeine von Gauß gefundene Formel

$$\Sigma(N) = N \times (N + 1)/2$$

Gauß stammte aus Magdeburgs Partnerstadt Braunschweig und war ab 1990 auf dem Zehnmarkschein abgebildet.

Die Erzählung ist geschichtlich nicht belegbar, aber trotzdem schön. An diesem einfachen Beispiel sehen wir einige Dinge, die Mathematikern sehr wesentlich sind.

Erstens fragen wir uns bei komplizierten und langwierigen Berechnungen, ob es nicht auch einfacher und schneller geht. Monotones Rechnen ist langweilig. Schnelle Schüler brauchen für die Zahlen von 1 bis 100 ohne Taschenrechner mehr als 10 Minuten, wenn sie tatsächlich alle 100 Zahlen einzeln addieren, mit einem Taschenrechner vielleicht 2 Minuten. Mit der Formel sind es nur wenige Sekunden. Die Formel ist somit dem monotonen Rechnen überlegen.

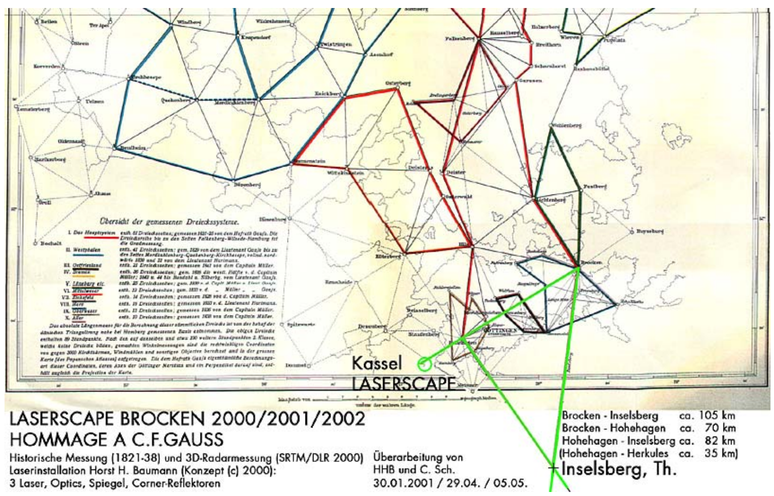
Zweitens ist aufgrund der Einfachheit der Formel das Rechenergebnis weniger fehleranfällig.

Drittens ist die Formel sehr günstig, wenn die Zahl N sehr groß wird. Dann braucht man selbst mit dem Taschenrechner sehr lange, während der Aufwand mit der Formel nur langsam steigt. Für $N = 1$ Million braucht man selbst mit dem Taschenrechner fast 2 Monate ohne Pause, wenn man es schafft jede Addition in durchschnittlich 5 Sekunden einzutippen. Mit der Formel dauert es vielleicht 15 Sekunden. Der Aufwand bei Verwendung der Formel wächst nur mit der Zahl der Dezimalstellen, d.h. wie der Logarithmus zur Basis 10, d.h. er beträgt circa $2log(N)$. Bei einer Million ergibt das 12, bei 100 nur 4. Bei den Additionen wächst der Aufwand stärker als N, da die Zahl der Dezimalstellen immer größer wird, wenn man bei 1 anfängt und die Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge aufaddiert.

Die Untersuchung des Verhaltens von Berechnungsverfahren für große N wird als Komplexitätstheorie bezeichnet. Diese Theorie gilt zwar als Teilgebiet der theoretischen Informatik, methodisch ist es aber ein Gebiet der Mathematik auf dem auch viele Mathematiker forschen. Auf diesem Gebiet gibt es ein berühmtes Problem, das P/NP Problem, für dessen Lösung das Clay Mathematics Institute eine Million US-Dollar Preisgeld ausgesetzt hat, siehe http://www. claymath.org/millennium/

Viertens ist die Formel sehr zuverlässig. Sie gilt für alle natürliche Zahlen N. Man kann dieses auch einfach mathematisch mit dem sogenannten Prinzip der vollständigen Induktion beweisen. Die Formel gilt für $N = 1$, also $\Sigma(1) = 1$. Wir nehmen an, sie gilt für ein N und zeigen, dass sie dann auch für $N + 1$ gilt. Dafür müssen wir nur $\Sigma(N+1) = \Sigma(N)+N+1$ zeigen, was leicht auszurechnen ist. Wenn das gezeigt ist, gilt sie für $N = 1$, somit gilt sie auch für $N = 2$, $N = 3$ usw.

Um zu dem Großrechner JUGENE zurückzukommen. Viele Rechenprogramme lösen sehr intensiv große lineare Gleichungssysteme. Es gibt Schätzungen, dass dafür ein erheblicher Teil der Rechenleistung weltweit verwendet wird. Deshalb werden für den Rechnervergleich sogenannte Linpack-Verfahren herangezogen, die genau solche Lösungsverfahren enthalten. Auch auf diesem Gebiet hat Gauß sowohl mit dem Gaußschen-Algorithmus als auch mit einem iterativen Verfahren wesentliche Beiträge geleistet. Er selbst musste in seiner Berufstätigkeit auf den Gebieten der Landvermessung und der Astronomie viel praktisch rechnen und war deshalb an praktischen Verfahren sehr interessiert.



Triangulierung des Königreichs Hannover (1818-1826)

Auf der Brockenspitze erinnert eine Plakette daran, dass Gauß von dort aus Messungen vornahm für eine Triangulierung des Königreichs Hannover, an der er beteiligt war. Damals war es nicht einfach die Höhe des Brocken oder die geographische Länge und Breite von Braunschweig zu bestimmen. Dieses geschah mit einer Kombination aus genauen Messungen und mathematischen Berechnungen.

Die heutige mathematische Forschung ist sehr vielseitig und geht weit über die Betrachtung von Berechnungsverfahren hinaus. Aber schnelle, einfache Verfahren sowie der Beweis, dass solche Verfahren das richtige Ergebnis liefern, ist eines der zentralen Anliegen der Mathematik, das in Magdeburg in Lehre und Forschung stark vertreten ist. Es werden hier auf den Gebieten der Diskreten Optimierung und der Numerik

Partieller Differentialgleichungen vielfältige Verfahren und deren Anwendung in Medizin und Technik untersucht.

Faszinierend an der Mathematik ist, dass manche Probleme, die erst schwierig aussehen, durch die richtige Betrachtungsweise recht einfach gelöst werden.

Gerald Warnecke

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg

E-mail address: gerald.warnecke@ovgu.de

Der mathematische Blick (Teil 4)

Mathematik in GPS, UMTS und anderen drahtlosen Netzwerken

Mathematik ist Überraschung, Abenteuer und Experiment. Professoren der Fakultät für Mathematik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg nehmen das „Jahr der Mathematik" zum Anlass, um dies in einer Beitragsreihe zu veranschaulichen. Im vierten Teil geht es heute um die mathematischen Voraussetzungen für das Funktionieren von Navigationsgeräten.

Von **Prof. Dr. Alexander Pott**

„Du kannst mehr Mathe, als du denkst!" So lautet das Motto einer Plakataktion zum „Jahr der Mathematik". Schauen wir uns ein Beispiel an: Bei einer Party reden alle Menschen durcheinander. Sie sind einem Mix ganz unterschiedlicher akustischer Signale ausgesetzt, und trotzdem gelingt es Ihnen (in der Regel), Ihren Gesprächspartner zu verstehen. Sie filtern aus dem Rauschen die für sich relevante Information heraus.

Die „Volksstimme" berichtete am 6. März darüber, dass Magdeburger Hirnforscher daran arbeiten, diesen Vorgang zu verstehen: Es ist eine beeindruckende Leistung unseres Gehirns, die in technischen Anwendungen nur unter Einsatz raffinierter mathematischer Methoden gelingt.

Drahtloses Internet und mobiles Telefonieren sind für viele Menschen aus ihrem Leben nicht mehr wegzudenken. Das bedeutet, dass eine Fülle an Information in Form elektromagnetischer Wellen durch den Äther schwirrt, und wir möchten natürlich an unseren Endgeräten die für uns bestimmte Information abgreifen, genauso wie wir bei einer Party gerne das langweilige Gerede unseres Tischnachbarn ausblenden, um uns am interessanten Gespräch einige Plätze entfernt zu beteiligen.

Die Sprache der Satelliten

Welche Lösungsmöglichkeiten gibt es? Wir können jedem Sender eine eigene Frequenz zuweisen, auf der gesendet wird, so wie wir es vom Radio her gewohnt sind. Dieses Verfahren hat sich lange bewährt, aber mit den zunehmenden Anforderungen im Drahtlosverkehr sind neue Lösungen gefordert. Man versucht heute, Information nicht nur auf einer Frequenz zu übertragen, sondern das Signal auf einen ganzen Frequenzbereich zu verteilen (spreizen), so dass man auch von „Frequenzspreizverfahren" spricht. Ein Vorteil: Hört jemand die Signale ab, so kann er kaum feststellen, ob überhaupt etwas gesendet wurde. Das gesendete Signal unterscheidet sich für einen Lauscher kaum von sogenanntem Rauschen. Diese Eigenschaft war die ursprüngliche militärische Motivation für die Entwicklung der modernen „spread spectrum"-Technologien.

Jeder Vorteil hat einen Nachteil: Wenn das gesendete Signal sich anhört wie zufälliges Rauschen, wie kann man dann als Empfänger die Information herausfiltern? Und genau an dieser Stelle kommt die Mathematik ins Spiel. Erläutert sei dies an Hand einer täglichen Anwendung, dem Global Positioning System, kurz GPS.

Ein GPS-Empfänger kann Signale von mehreren Satelliten empfangen, und durch eine sehr genaue Synchronisation der deren Signale ist es möglich, aus deren Laufzeit die Entfernung zu den Satelliten zu bestimmen und damit die exakte Position auf der Erde. Nun sendet aber jeder Satellit auf derselben Frequenz, andernfalls müsste ein GPS-Empfänger ja wie ein Radio funktionieren, das viele Sender gleichzeitig hören kann, und dies wäre zu aufwändig.

Wie kann dann aber ein Empfänger entscheiden, von welchem Satellit aus er seine Signale empfängt? Das gelingt, indem man jedem Sender eine charakteristische „Sequenz" bestehend aus Nullen und Einsen zuordnet. Diese Sequenzen sind sozusagen die Sprache der Satelliten. Weil jeder Satellit eine andere Sprache spricht, kann der Empfänger das für ihn bestimmte Signal einfach herausfiltern, weil sich die Sprachen stark voneinander unterscheiden. Mathematiker sagen, die Signalsequenzen sollen (fast) orthogonal sein.

Orthogonal ist ein Begriff aus der Geometrie. Die meisten Leser werden unter orthogonalen Linien solche verstehen, die senkrecht aufeinander stehen. Man kann diesen Begriff aber auch auf Situationen verallgemeinern, wo „senkrecht" zunächst einmal keinen Sinn mehr ergibt. Orthogonal bedeutet dann, möglichst unterschiedlich zu sein: Zwei Geraden, die senkrecht aufeinander stehen, sind so verschieden wie das nur sein kann. Und das ist genau die Eigenschaft, die beim GPS ausgenutzt wird: Man wählt dort Gold-Sequenzen, die sich jeweils stark voneinander unterscheiden (etwas formaler: ihre Kreuzkorrelation ist klein). Dabei bedeutet Gold nicht das Edelmetall, sondern ist der Name eines Wissenschaftlers aus Kalifornien, der in den 60er Jahren an einigen Eliteuniversitäten der USA studiert hat und heute Präsident der „Robert Gold Comm Systems, Inc." ist.

Dieses Bild demonstriert das Navigationssystem Galileo, ein Gemeinschaftsprojekt der ESA und der Europäischen Union. Dieses System wird ähnlich wie das bekannte GPS (Global Positioning System) funktionieren. Via Satellit werden Signale zur Erde übertragen, die Zeit und Ort präzise bestimmen können. In dieser Computer-Animation erhält beispielsweise der Truck Signale von drei Satelliten. Wenn die Stellung der Satelliten bekannt ist, kann aus deren Entfernung vom Truck dessen genaue Position bestimmt werden. Das Empfangsgerät im Lastwagen muss die Signale der Satelliten unterscheiden können. Weil aber nur auf einer Frequenz gesendet wird, ist das mit den klassischen Verfahren (wie etwa beim Radio) nicht möglich. Man benutzt dazu eine Frequenzspreizung mit Hilfe orthogonaler Sequenzen. Bis zum Ende des Jahrzehnts soll das neue Satelliten-Navigationssystem für den Auto-, Flug- und Schiffsverkehr einsatzbereit sein, dann werden 30 Satelliten in einer Höhe von etwa 23 600 Kilometern die Erde umrunden. Mit Galileo will Europa die Vormachtstellung der US-Variante GPS brechen. Galileo soll genauer arbeiten und vor allem für zivile Dienste eingesetzt werden. Foto: ESA/dpa

Unübertreffbare Gold-Sequenzen

Beim GPS werden Sequenzen der Länge 1023 benutzt, das heißt, man hat eine Folge von 1023 aufeinander folgenden Zahlen 0 und 1. Jedem der 32 GPS-Satelliten wird eine eigene Sequenz zugeordnet, und diese 32 Sequenzen sind ganz unterschiedlich. Es gibt clevere mathematische Methoden, wie man solche guten Folgen findet.

Interessanterweise besteht ein enger Zusammenhang zum Lösen quadratischer Gleichungen, man muss nur etwas verallgemeinern: Statt quadratischer Gleichungen mit nur einer Unbekannten x betrachtet man Gleichungen mit mehreren Variablen, und statt mit den üblichen Zahlen rechnet man mit endlichen Zahlbereichen (man definiert einfach 1+1=0 und beschränkt sich auf die zwei Zahlen 0 und 1). Hier zeigt sich die Leistungsfähigkeit von Mathematik: Eine einmal entwickelte Theorie (die Theorie quadratischer Gleichungen) kann auf viele verschiedene Gebiete angewendet werden. Die Sequenzen beim GPS basieren auf denselben Gleichungstypen wie diejenigen, mit denen man Kreise und Kugeln beschreiben kann.

Aber Mathematiker können noch mehr: Sie können auch beweisen, dass die eingesetzten Verfahren bestmöglich sind: Kein Ingenieur muss versuchen, noch bessere als die erwähnten Gold-Sequenzen zu finden, weil man mathematisch präzise zeigen kann: Besser als mit Gold geht es nicht.

Ähnliche Sequenzen werden beim UMTS verwendet, dem zur Zeit aktuellen Mobilfunkstandard. Es ist klar, dass auch beim Mobilfunk aus einem Gemisch ganz unterschiedlicher Signale das richtige herausgefunden werden muss, und das macht man mit einer auf den Gold-Sequenzen beruhenden Frequenzspreizung. Es gibt noch etliche Varianten solcher Multiplexverfahren, bei denen Information „gespreizt" wird, um mehreren Nutzern Zugriff auf eine beschränkte Ressource, nämlich das zur Verfügung stehende Frequenzband, zu ermöglichen: Alle diese Verfahren sind technische Herausforderungen, und alle haben einen ganz wesentlichen „mathematischen Kern".

Auch Mathematikerinnen und Mathematiker aus Magdeburg arbeiten an der Konstruktion guter Signalfolgen und verwandten Fragestellungen. Dabei sind in den letzten Jahren gemeinsam mit Kooperationpartnern aus Norwegen, Frankreich, den USA und Belgien einige theoretisch überraschende Ergebnisse erzielt worden.

Lesen Sie am 14. Juni von Prof. Dr. Heidemarie Bräsel „Das Gehemnis der Schildkröte – Mathematik der Lateinischen Quadrate"

Veranstaltungen der Universität Magdeburg

- **22. Mai , 20 Uhr, Moritzhof: Pisa Bach Pythagoras (Musik-Kabarett).** Dr. Dietrich „Piano" Paul verspricht „Lachen nach Zahlen". Der Mathematiker, Musiker und Kabarettist bietet ein überraschendes Kabarett zu den Fragen: Was haben Mathematik und eine „musikalische Fuge", Mengenlehre und Noten gemeinsam und wie kann man zwischen Bach und Pythagoras jonglieren? Zwei Stunden Spaß, nicht nur für Mathematiker.
- **28. Mai, 20 Uhr, CineMath-Filmfestival: „PI – System im Chaos" (USA, 1998) –** Der Film von Darren Aronofsky handelt von dem paranoiden Mathematiker Max Cohen, der glaubt, dass alles in der Natur anhand von Zahlen verstanden wird. Mit Hilfe seines Computers versucht er, vorhersehbare Muster in den Kursdaten der Börsen zu finden. Dabei stößt er auf eine 216-stellige Zahl. Diese Zahl wird Cohen zum Verhängnis…

Wissenschaftsjahr 2008
Mathematik
Alles, was zählt

- **29. Mai, 17 Uhr, Festung Mark: „Der mathematische Blick: Der Raum – ein Thema mit Variationen".** Prof. Dr. Jörg M. Wills (Universität Siegen) befasst sich mit drei historisch und mathematisch besonders wichtigen Beispielen – unseren „Anschauungsraum" und zwei Variationen, die gekrümmten und die hochdimensionalen Räume. An ihnen zeigen wir den Übergang von der (scheinbar nutzlosen) mathematischen Idee zur Anwendung in der realen Welt.

www.ovgu.de/jdm2008

Mathematik in GPS, UMTS und anderen drahtlosen Netzwerken

ALEXANDER POTT

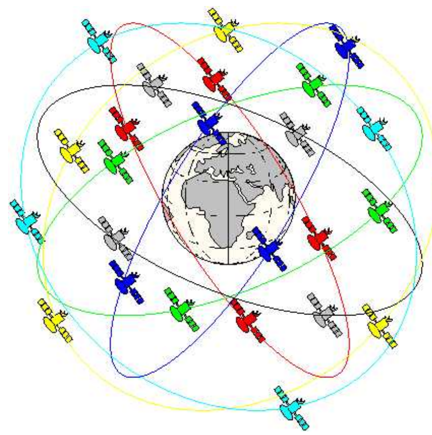
,,**D**u kannst mehr Mathe als du denkst", so lautet das Motto einer Plakataktion zum Jahr der Mathematik. Schauen wir uns ein Beispiel an: Sie sind bei einer Party. Alle Menschen reden durcheinander. Sie sind einem Mix ganz unterschiedlicher akustischer Signale ausgesetzt, und trotzdem gelingt es Ihnen (in der Regel), Ihren Gesprächspartner zu verstehen. Sie filtern also aus dem Rauschen die für sich relevante Information heraus. Die Volksstimme berichtete am 6. März 2009 darüber, dass Magdeburger Hirnforscher daran arbeiten, diesen Vorgang zu verstehen: Es ist eine beeindruckende Leistung unseres Gehirns, die in technischen Anwendungen nur unter Einsatz raffinierter mathematischer Methoden gelingt. Drahtloses Internet und mobiles Telefonieren sind für viele Menschen aus ihrem Leben nicht mehr wegzudenken. Das bedeutet, dass eine Fülle an Informationen in Form elektromagnetischer Wellen durch den Äther schwirrt, und wir möchten natürlich an unseren Endgeräten die für uns bestimmte Information abgreifen, genauso wie wir bei einer Party gerne das langweilige Gerede unseres Tischnachbarn ausblenden, um uns am interessanten Gespräch einige Plätze entfernt zu beteiligen.

Welche Lösungsmöglichkeiten gibt es? Wir können jedem Sender eine eigene Frequenz zuweisen, auf der gesendet wird, so wie wir es vom Radio her gewohnt sind. Dieses Verfahren hat sich lange bewährt, aber mit den zunehmenden Anforderungen im Drahtlosverkehr sind neue Lösungen gefordert. Man versucht heute, Information nicht nur auf einer Frequenz zu übertragen, sondern das Signal auf einen ganzen Frequenzbereich zu verteilen (spreizen), so dass man auch von ,,Frequenzspreizverfahren" spricht. Ein Vorteil: Hört jemand die Signale ab, so kann er/sie kaum feststellen, ob überhaupt etwas gesendet wurde. Das gesendete Signal unterscheidet sich für einen Lauscher kaum vom sogenannten Rauschen. Diese Eigenschaft war die ursprüngliche militärische Motivation für die Entwicklung der modernen ,,spread spectrum" Technologien.

Jeder Vorteil hat einen Nachteil: Wenn das gesendete Signal sich anhört wie zufälliges Rauschen, wie kann man dann als Empfänger die Information herausfiltern? Und genau an dieser Stelle kommt die Mathematik ins Spiel. Erläutert sei dies an Hand einer täglichen Anwendung: Das **G**lobal **P**ositioning **S**ystem (GPS) kennt heute fast jeder. Ein GPS-Empfänger kann Signale von mehreren Satelliten empfangen, und durch eine sehr genaue Synchronisation der Signale ist es möglich, aus deren Laufzeit die Entfernung zu den Satelliten zu bestimmen und damit die exakte Position auf der Erde. Nun sendet aber jeder Satellit auf derselben Frequenz, andernfalls müsste ein GPS Empfänger ja wie ein Radio funktionieren, das viele Sender gleichzeitig hören kann, und dies wäre zu aufwändig. Wie kann dann aber ein Empfänger entscheiden, von welchem Satellit aus er seine Signale empfängt? Das gelingt, indem man jedem Sender eine charakteristische ,,Sequenz” bestehend aus 0'en und 1'en zuordnet. Die Satelliten senden fortwährend solche Signalfolgen, und diese Folgen sollen (fast) orthogonal sein. Was bedeutet das? Orthogonal ist ein Begriff aus der Geometrie. Die meisten Leser werden unter orthogonalen Linien solche verstehen, die senkrecht aufeinander stehen. Man kann diesen Begriff aber auch auf Situationen verallgemeinern, wo ,,senkrecht” zunächst einmal keinen Sinn mehr macht. Orthogonal bedeutet dann, möglichst unterschiedlich zu sein: Zwei Geraden, die senkrecht aufeinander stehen, sind so verschieden wie das nur sein kann. Und das ist genau die Eigenschaft, die beim GPS ausgenutzt wird: Man wählt dort Gold-Sequenzen, die sich jeweils stark voneinander unterscheiden (etwas formaler: ihre Kreuzkorrelation ist klein). Dabei bedeutet Gold nicht das Edelmetall, sondern einen Wissenschaftler aus Kalifornien, der in den 60er Jahren an einigen Eliteuniversitäten der USA studiert hat (u. a. MIT und Harvard) und zur Zeit Präsident der ,,Robert Gold Comm Systems, Inc.” ist.

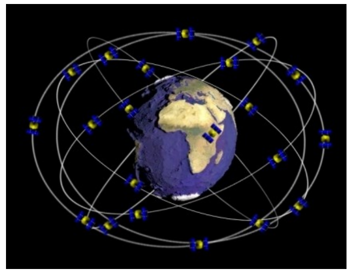
Beim GPS werden Sequenzen der Länge 1023 benutzt, d. h. man hat eine Folge von 1023 aufeinander folgenden Zahlen 0 und 1. Jedem der 32 GPS-Satelliten wird eine eigene Sequenz zugeordnet, und diese 32 Sequenzen sind ganz unterschiedlich. Es gibt clevere mathematische

Methoden, wie man solche guten Folgen findet. Interessanterweise besteht ein enger Zusammenhang zum Lösen quadratischer Gleichungen, man muss nur etwas verallgemeinern: Statt quadratischer Gleichungen mit nur einer Unbekannten x betrachtet man Gleichungen mit mehreren Variablen, und statt mit den üblichen Zahlen rechnet man mit endlichen Zahlbereichen (man definiert einfach $1 + 1 = 0$ und beschränkt sich auf die zwei Zahlen 0 und 1). Hier zeigt sich die Leistungsfähigkeit von Mathematik: Eine einmal entwickelte Theorie (die Theorie quadratischer Gleichungen), kann auf viele verschiedene Gebiete angewendet werden. Die Sequenzen beim GPS basieren auf denselben Gleichungstypen wie diejenigen, mit denen man Kreise und Kugeln beschreiben kann!



Aber Mathematiker können noch mehr: Sie können auch **beweisen**, dass die eingesetzten Verfahren bestmöglich sind: Kein Ingenieur muss versuchen, noch bessere als die erwähnten Gold-Sequenzen zu finden, weil man mathematisch präzise zeigen kann: Besser als mit Gold geht es nicht!

Ähnliche Sequenzen werden beim UMTS verwendet, dem zur Zeit aktuellen Mobilfunkstandard. Es ist klar, dass auch beim Mobilfunkstandard. Es ist klar, dass auch beim Mobilfunk aus einem Gemisch ganz unterschiedlicher Signale das richtige herausgefunden werden muss, und das macht man mit einer auf den Gold-Sequenzen beruhenden Frequenzspreizung. Es gibt noch etliche Varianten solcher Multiplexverfahren, bei denen Information ,,gespreizt" wird, um mehreren Nutzern Zugriff auf eine beschränkte Ressource, nämlich das zur Verfügung stehende Frequenzband, zu ermöglichen: Alle diese Verfahren sind technische Herausforderungen, und alle haben einen ganz wesentlichen ,,mathematischen Kern".



Auch Mathematikerinnen und Mathematiker aus Magdeburg arbeiten an der Konstruktion guter Signalfolgen und verwandten Fragestellungen. Dabei sind in den letzten Jahren gemeinsam mit Kooperationspartnern aus Norwegen, Frankreich, USA und Belgien einige theoretisch überraschende Ergebnisse erzielt worden.

Mathematik ist faszinierend: Einerseits ist sie reine Geisteswissenschaft. Mathematische Ideen existieren unabhängig von allem Materiellen. Andererseits ist Mathematik die Querschnittswissenschaft, die in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften benötigt wird, um unsere materielle Welt zu beschreiben.

Alexander Pott

Otto-von-Guericke Universität Magdbeurg, Fakultät für Mathematik, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg

Der mathematische Blick (Teil 5)

Das Geheimnis der Schildkröte

Mathematik ist Überraschung, Abenteuer und Experiment. Professoren der Fakultät für Mathematik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg nehmen das „Jahr der Mathematik" zum Anlass, um dies in einer Beitragsreihe zu veranschaulichen. Im 5. Teil geht es um magische Quadrate.

Von **Prof. Dr. Heidemarie Bräsel**

Nach einer chinesischen Legende tauchte 2200 Jahre vor der Zeitrechnung täglich eine Schildkröte aus dem Fluss Lo auf und trug auf ihrem Rücken ein Zahlenquadrat aus den Zahlen 1 bis 9, das sogenannte Lo-Shu-Quadrat. Die Zahlen sind in das 3x3-Quadrat so eingetragen, dass die Summe der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen jeweils 15 (Anzahl der Tage zwischen Vollmond und Neumond) ist.

In der Mitte steht eine 5 für die fünf Elemente im alten China: Erde, Holz, Feuer, Metall und Wasser. Erst als die Menschen dieses Quadrat als Sinnbild für die Harmonie der Welt erkannten, wurden ihre Gebete an die Götter erhört und die verheerende Überschwemmung des Flusses ging zurück. (Bild 2).

Allgemein bezeichnet man ein n mal n Quadrat aus den Zahlen 1 bis n^2 als magisches Quadrat der Ordnung n, wenn die Summe der Zahlen jeder Zeile, jeder Spalte und der beiden Diagonalen die gleiche ist. Diese magische Summe des Quadrats ergibt sich als Summe aller Zahlen im Quadrat, geteilt durch die Anzahl der Zeilen.

Solchen Quadraten wurden magische Kräfte zugeschrieben. Man gravierte sie auf Amulette und ordnete jedem Planeten eins zu. Die Schreib- und Rechenmeister vor Erfindung des Buchdrucks hatten oft ein magisches Quadrat als ihr Markenzeichen.

Sudoku lebt von lateinischen Quadraten

Wie lassen sich solche Zahlenquadrate erzeugen? Schon Adam Ries gibt 1574 in seinem Rechenbüchlein eine Konstruktionsvorschrift für ein magisches Quadrat der Ordnung 3 an. Eine mögliche Konstruktion für magische Quadrate ungerader Ordnung soll hier für die Ordnung 5 beschrieben werden (Bild 3): Man ordne die Zahlen von 1 bis 25 diagonal versetzt an, wie in Bild 3 gezeigt wird. Dann markiert man das 5x5-Mittelquadrat und verschiebt jeweils die drei verbliebenen Zahlen gemeinsam soweit wie möglich in die freien Stellen dieses 5x5-Quadrats, und zwar von Ost nach West, von West nach Ost, von Nord nach Süd und von Süd nach Nord, fertig. Übrigens entsteht auch das Lo-Shu-Quadrat nach dieser Vorschrift.

Warum entsteht dabei ein magisches Quadrat? Jede Zahl z von 1 bis 25 kann in der Form z = a mal 5 + b dargestellt werden, wobei der Rest b nur Werte von 1 bis 5 annehmen darf. Zum Beispiel ist 16 = 3 mal 5 + 1 (a = 3, b = 1) oder 15 = 2 mal 5 + 5 (a = 2, b = 5). Die Werte von a und b für eine Zahl z lassen sich aus Bild 3 ablesen, indem man von der Zahl z aus diagonal nach links oder rechts oben geht, bis man die a- bzw. die b-Werte erreicht. Auf diese Weise lässt sich unser Quadrat in ein a- und ein b-Quadrat zerlegen, wie in Bild 4 dargestellt ist.

Durch die Konstruktionsvorschrift kommt jede Zahl von 0 bis 4 in dem a-Quadrat in jeder Zeile und Spalte genau einmal vor, dies trifft für die Zahlen 1 bis 5 im b-Quadrat ebenfalls zu. Bei zeilenweiser oder spaltenweiser Summierung der Zahlen im konstruierten Quadrat muss sich darum immer die gleiche Summe ergeben.

Etwas mehr Arbeit erfordert der Beweis, dass auch die Summe auf den Diagonalen magisch ist. Dies ist eine Aufgabe für die Tüftler unter Ihnen.

Die beiden entstehenden Quadrate sind so genannte lateinische Quadrate, auch bei ihnen ist die Summe der Zahlen in jeder Zeile und Spalte gleich, nur taucht jeder Eintrag genau 5 mal auf. Die Quadrate haben überdies eine besondere Eigenschaft: Auf den Feldern, auf denen dieselbe Zahl im a-Quadrat steht, stehen im b-Quadrat jeweils die Zahlen 1 bis 5. In Bild 4 ist dies für die Zahl 1 markiert. Solche lateinischen Quadrate stehen orthogonal zueinander.

Allgemein werden in einem lateinischen Quadrat der Ordnung n die Zahlen 1 bis n (oder 0 bis n-1) so in den Zeilen und Spalten angeordnet, dass jede Zahl genau einmal in jeder Zeile und Spalte steht. Wenn Sie im Sudoku-Fieber sind, dann kennen Sie zur Genüge lateinische 9x9 Quadrate.

Die Bezeichnung „lateinische Quadrate" geht auf den bekannten Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783) zurück, der lateinische Buchstaben anstelle von Zahlen verwendete.

Euler benutzte lateinische Quadrate für das 36-Offiziersproblem: Für eine Militärparade sollten 36 Offiziere aus 6 verschiedenen Regimentern und mit 6 verschiedenen Dienstgraden so in einem 6x6-Block aufgestellt werden, dass in jeder Zeile und Spalte des Blocks jedes Regiment und jeder Dienstgrad genau einmal vertreten war. Also hatte Euler zwei lateinische Quadrate der Ordnung 6 zu bestimmen, das erste für das Regiment, das zweite für den Dienstgrad. Damit nicht genug, die beiden mussten orthogonal zueinander sein, da aus einem festen Regiment jeder Dienstgrad vorkommen musste.

So sehr sich Euler auch mühte, er fand keine zwei zueinander orthogonale Quadrate der Ordnung 6. Erst 200 Jahre später war mathematisch bewiesen: Es gibt zueinander orthogonale Quadrate aller Ordnungen n>2 – nur für die Ordnung 6 existieren keine.

Was einst als Spielerei begann, hat heute erfolgreiche mathematische Anwendung auf vielen Gebieten gefunden. Ein Beispiel ist das folgende Stundenplanproblem: Die Klassen 2, 3 und 4 werden von Frau Müller, Frau Schmidt und Herrn Krause in drei verschiedenen Fächern jeweils eine Stunde unterrichtet. Es wird üblicherweise vorausgesetzt, dass in einer Unterrichtsstunde genau ein Lehrer vor genau einer Klasse steht. Es ist ein Stundenplan aufzustellen, der insgesamt wenig Zeit in Anspruch nimmt.

Werden alle Unterrichtsstunden hintereinander gegeben, braucht man 9 Stunden, und dies ist der schlechteste Stundenplan. Da insgesamt 9 Unterrichtsstunden von 3 Lehrenden zu geben sind, werden mindestens 3 Stunden gebraucht. Die beste Lösung kann durch ein lateinisches Quadrat mit den Einträgen 1, 2 und 3 beschrieben werden: jede Zeile entspricht einem Lehrer und jede Spalte entspricht einer Klasse. Alle Unterrichtsstunden, denen im Quadrat eine 1 zugeordnet ist, werden zuerst abgehalten, dann folgen alle mit einer 2 und schließlich alle mit einer 3.

Stundenplan-Problem in der Wirtschaft

So einfach sind Stundenpläne, wenn man keine weiteren Nebenbedingungen hat. Erst die vielen zusätzlichen Bedingungen – nicht jeder Lehrer unterrichtet jedes Fach, nicht jeder Lehrer kann zu jedem Zeitpunkt unterrichten, nicht Mathe nach Sport – machen das Problem so schwierig, dass man oft damit zufrieden sein muss, überhaupt eine Lösung zu finden, geschweige denn die beste (Bild 5).

Probleme vom Stundenplantyp sind in der Wirtschaft sehr verbreitet. Wenn man zum Beispiel in dem kleinen idealen Stundenplan die Klassen als Aufträge und die Lehrer als Maschinen interpretiert, wobei die Bearbeitung eines Auftrags auf einer Maschine genau eine Zeiteinheit dauert, entsteht mit dem besten Stundenplan gerade ein zeitminimaler Bearbeitungsplan der Aufträge auf den Maschinen.

Natürlich ist es in der Praxis selten der Fall, dass die Anzahl der Aufträge gerade gleich der Anzahl der Maschinen ist. Dann werden aus den lateinischen Quadraten lateinische Rechtecke. Darüber hinaus werden selten alle Bearbeitungszeiten 1 sein.

Weitere Bedingungen kommen hinzu, wie das Einhalten von Fälligkeitsterminen für die Aufträge oder die Einplanung von Umrüstzeiten für die Maschinen. Die Aufgabe der Mathematiker besteht dann darin, gemeinsam mit den Technologen alle Bedingungen für den Produktionsablauf zu erfassen und das Ziel der Optimierung festzulegen.

Dann sind die Mathematikexperten gefragt, die als erstes die Frage zu beantworten haben: Ist überhaupt eine exakte Lösung des Problems mit Hilfe des Computers in vertretbarer Zeit zu bestimmen? In der überwiegenden Anzahl der Probleme wird dies nicht der Fall sein, also müssen geeignete Algorithmen entwickelt werden, um eine möglichst gute Näherungslösung in einer akzeptablen Zeit zu ermitteln.

Lesen Sie am 12. Juli in dieser Reihe den Beitrag „Primzahlen sind der Wahnsinn" von Prof. Dr. Wolfgang Willems.

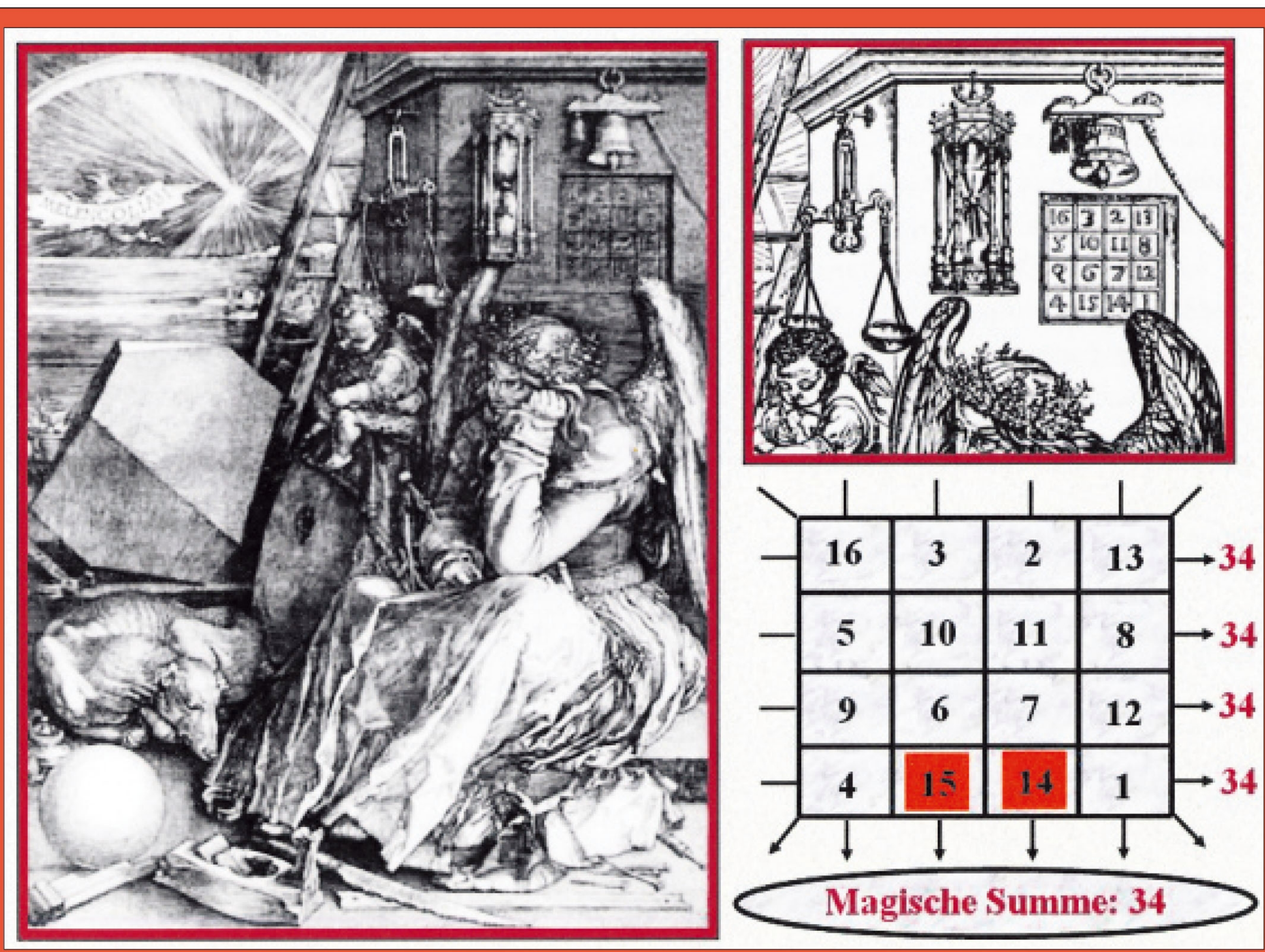


Bild 1: Der Kupferstich „Melancholie", in dem Albrecht Dürer die tiefe Trauer um den Tod seiner Mutter im Jahr 1514 thematisiert, enthält ein magisches Quadrat der Ordnung 4. Die magische Summe 34 entsteht darin als Summe der 4 Innenfelder, der 4 Eckfelder, auf den Ecken eines eingefügten Quadrates (5+2+12+15) oder eines Drachenvierecks (10+2+8+14). Legt man durch den Mittelpunkt des Quadrats eine Gerade, ist auch die Summe aller Zahlen auf den Feldern, durch die die Gerade geht (z.B. 2+11+6+15), magisch. Welch Wunder der Zahlen!

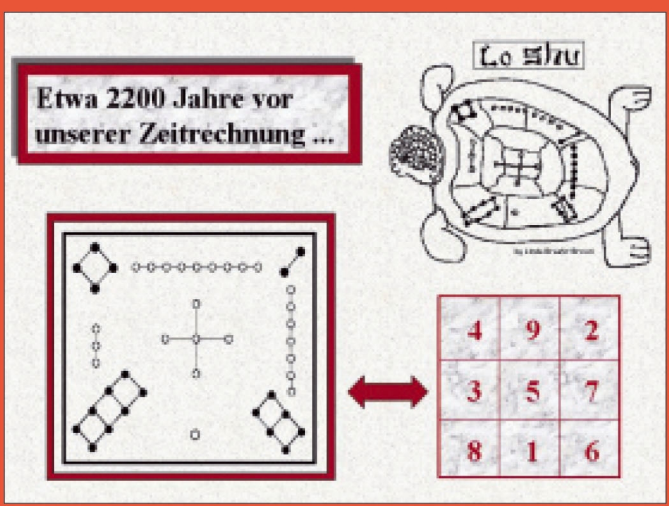


Bild 2: Das Lo-Shu Quadrat – Sinnbild für die Harmonie der Welt.

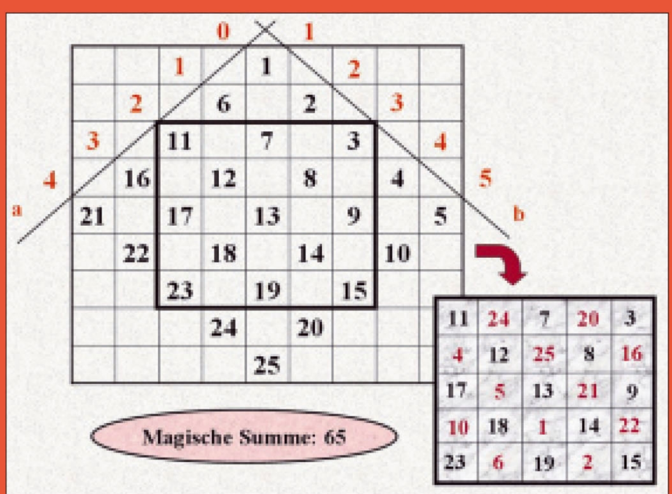


Bild 3: Konstruktion eines magischen Quadrates der Ordnung 5 mit der magischen Summe 65.

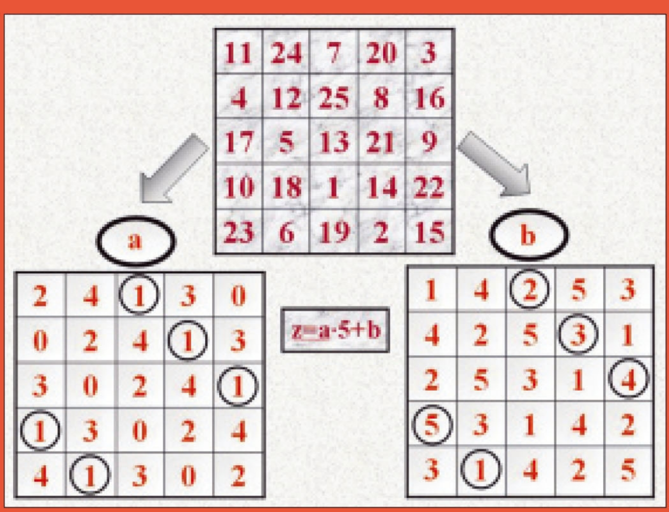


Bild 4: Aus einem magischen Quadrat der Ordnung 5 entstehen zwei lateinische Quadrate der Ordnung 5, die zueinander orthogonal sind.

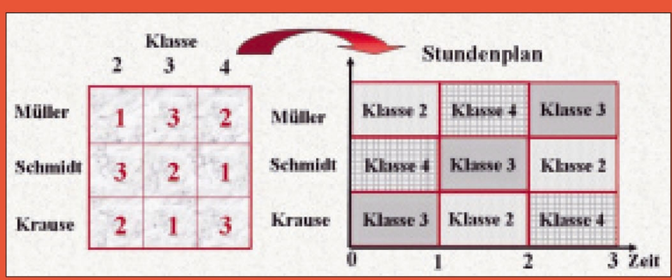


Bild 5: Mit Hilfe eines lateinischen Quadrats kann ein Stundenplan konstruiert werden, der am wenigsten Zeit benötigt.

Wettbewerb

Die TU Berlin und die Uni Magdeburg geben Schülern ab der 10. Klasse die Möglichkeit, ihr mathematisches Geschick auszuprobieren. Vier Universitätsprofessoren haben zu je einem Thema der Diskreten Mathematik (befasst sich mit endlichen mathematischen Strukturen) einen Aufgabenblock ausgearbeitet. Als Lösung genügen elementare, geschickt zusammengestellte Schlüsse. Die Aufgaben werden am 22. Juni veröffentlicht: www.math.tu–berlin.de/~felsner/DMSWe. Einsendeschluss ist am 15. September.

Veranstaltungen der Universität Magdeburg

- **24. Juni, 17 Uhr, Festung Mark: „Digitale Geometrie für virtuelle Welten"** (Prof. Dr. Konrad Polthier, FU Berlin) Die virtuelle Welt von SecondLife und der neueste Blockbuster aus Hollywood sind ohne digitale Geometrien undenkbar. Anschaulich, schildert der Vortrag die Anwendungen der modernen Geometriebearbeitung vom 3D-Scanner bis zum 3D-Drucker vom animierten 3D-Charakter zu 3D-Modellen unserer Städte.
- **3. Juli, 17 Uhr, Festung Mark: „U-Bahn fahren, Schiffe versenken und ‚heiße' Laptops: Mathematische Probleme im Alltag"** (Prof. Dr. Peter Gritzmann, TU München) Zweiundvierzig? Die Antwort auf das Leben, das Universum und den ganzen Rest – eine Zahl? Soweit würden nicht einmal die Mathematiker gehen, dass „alles Zahl" ist obwohl dies schon Pythagoras behauptet hat. Aber tatsächlich hat Mathematik fast alle Bereiche unseres Lebens durchdrungen.
- **Fimfestival CineMath 8. Juli, 20 Uhr, Moritzhof: „21"** (USA, 2008), Regie: Robert Luketic mit Kevin Spacey, Jim Sturgess, Kate Bosworth. Der Film zeigt die Aktivitäten von Glücksspielern der MIT Blackjack Teams, die seit 1979 die Spielcasinos in aller Welt bereisten und große Gewinnsummen erspielten.

www.ovgu.de/jdm2008

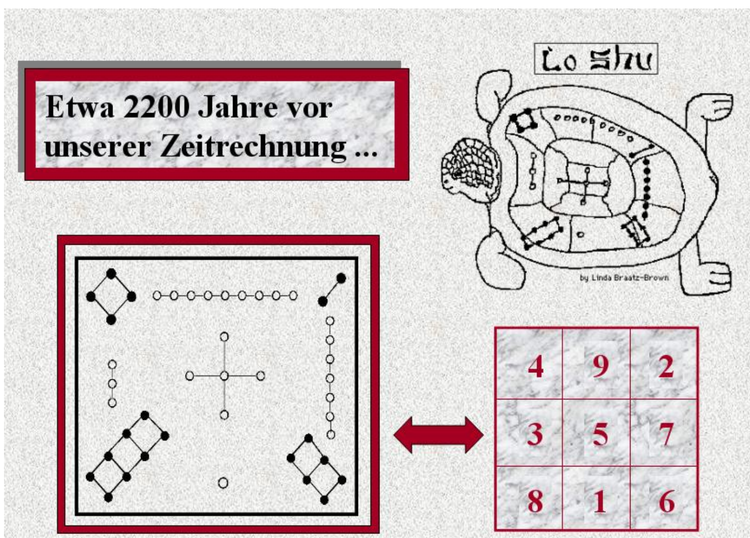
Ergänzungen

- Unter www.geocities.com/~harveyh/ gibt es neben magischen Quadraten auch magische Sterne und Kreise.
- Unter www.trump.de/magic-squares/index.html findet man perfekte magische Würfel, bei denen sogar die Raumdiagonalen die magische Summe haben.
- In dem Buch „Discrete Mathematics Using Latin Squares" von Laywine und Mullen sind weitere Anwendungen von lateinischen Quadraten enthalten.

Das Geheimnis der Schildkröte

HEIDEMARIE BRÄSEL

Nach einer chinesischen Legende tauchte 2200 Jahre vor der Zeitrechnung täglich eine Schildkröte [1] aus dem chinesischen Fluss Lo auf und trug auf ihrem Rücken ein Zahlenquadrat aus den Zahlen 1 bis 9, das so genannte Lo-Shu Quadrat. Die Zahlen sind in das 3x3 Quadrat so eingetragen, dass die Summe der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen jeweils 15 (Anzahl der Tage zwischen Vollmond und Neumond) ist. In der Mitte steht eine 5 für die fünf Elemente im alten China: Erde, Holz, Feuer, Metall und Wasser. Erst als die Menschen dieses Quadrat als Sinnbild für die Harmonie der Welt erkannten, wurden ihre Gebete an die Götter erhört und die verheerende Überschwemmung des Flusses ging zurück.



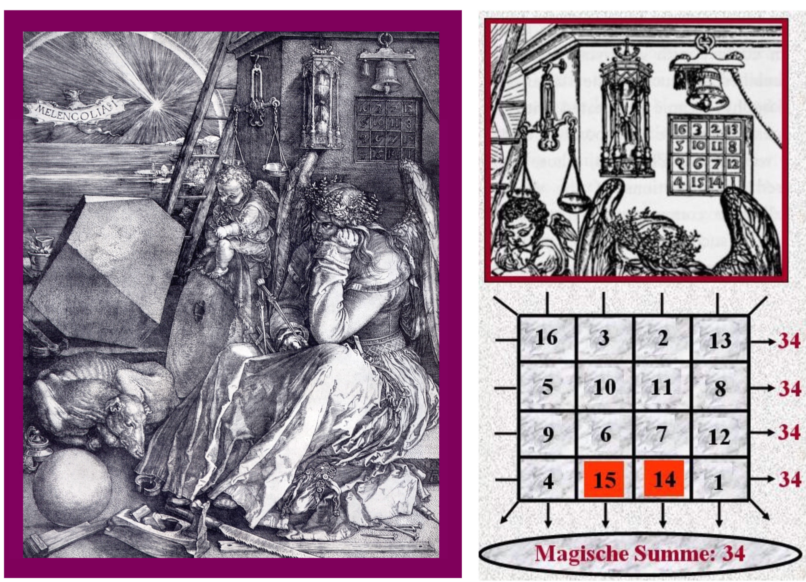
Das Lo-Shu Quadrat - Sinnbild für die Harmonie der Welt

Allgemein bezeichnet man ein n mal n Quadrat aus den Zahlen 1 bis n^2 als magisches Quadrat der Ordnung n, wenn die Summe der Zahlen jeder Zeile, jeder Spalte und der beiden Diagonalen die gleiche ist. Diese magische Summe des Quadrats ergibt sich als Summe aller Zahlen

[1] Abdruck der Schildkrötenzeichnung mit freundlicher Genehmigung von Linda Braatz-Brown, lindabb@ucr.edu

im Quadrat geteilt durch die Anzahl der Zeilen. Solchen Quadraten wurden magische Kräfte zugeschrieben. Man gravierte sie auf Amulette und ordnete jedem Planeten eins zu. Die Schreib- und Rechenmeister vor Erfindung des Buchdrucks hatten oft ein magisches Quadrat als ihr Markenzeichen.

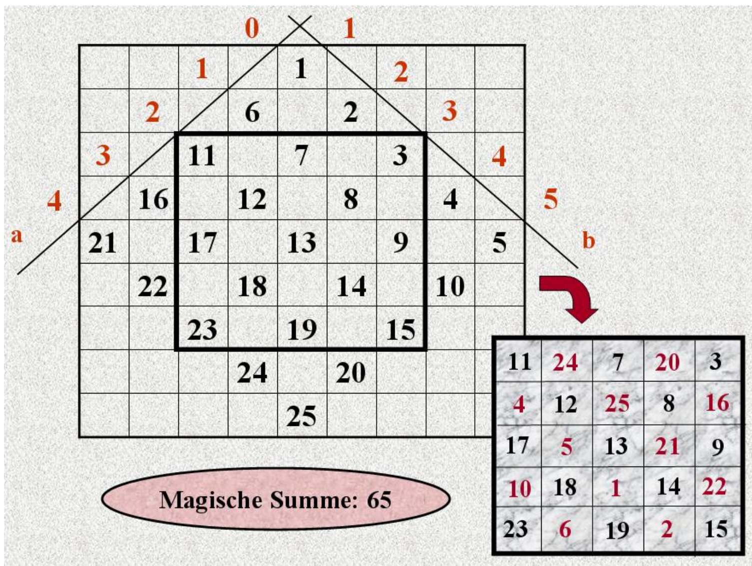
Auf dem Kupferstich *Melancholie* von Albrecht Dürer ist ein magisches Quadrat der Ordnung 4 enthalten. Das Bild lässt dem Betrachter die tiefe Trauer von Dürer zum Verlust seiner Mutter spüren, die im Jahre 1514, dem Entstehungsjahr des Kunstwerkes, starb. Die magische Summe 34 entsteht in Dürers Quadrat auch z.B. als Summe der vier Innenfelder, der vier Eckfelder, auf den Ecken eines eingefügten Quadrats (5+2+12+15) oder eines Drachenvierecks (10+2+8+14). Legt man durch den Mittelpunkt des Quadrats eine Gerade, ist auch die Summe aller Zahlen auf den Feldern, durch die die Gerade geht (z.B. 2+11+6+15), magisch. Welch Wunder der Zahlen!



Albrecht Dürer: Melencolia I (1514)

Wie lassen sich solche Zahlenquadrate erzeugen? Schon Adam Ries gibt in seinem Rechenbüchlein aus dem Jahre 1574 eine Konstruktionsvorschrift für ein magisches Quadrat der Ordnung 3 an. Eine mögliche Konstruktion für magische Quadrate ungerader Ordnung soll hier für die Ordnung 5 beschrieben werden: Man ordne die Zahlen von 1 bis 25 diagonal versetzt an, wie im folgenden Bild gezeigt wird. Dann markiert man das 5x5 Mittelquadrat und verschiebt jeweils die drei verbliebenen

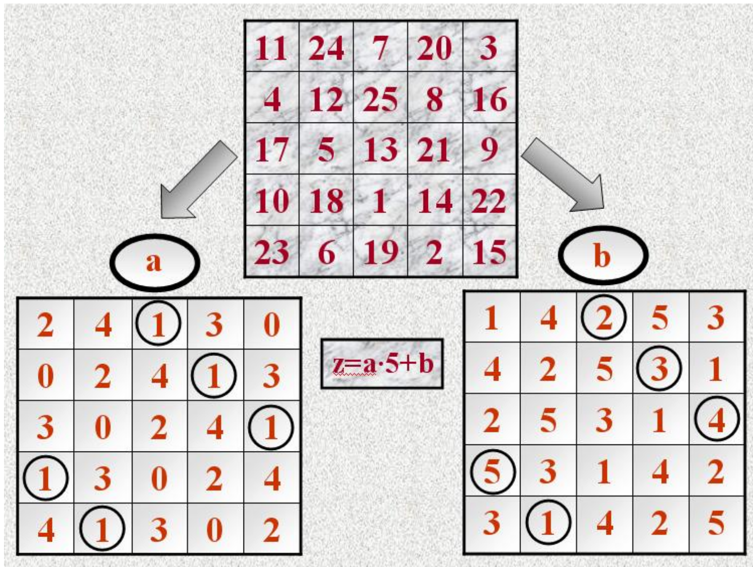
Zahlen gemeinsam soweit wie möglich in die freien Stellen dieses 5x5 Quadrats, und zwar von Ost nach West, von West nach Ost, von Nord nach Süd und von Süd nach Nord, fertig! Übrigens entsteht auch das Lo-Shu Quadrat nach dieser Vorschrift!



Konstruktion eines magischen Quadrats der Ordnung 5

Warum entsteht dabei ein magisches Quadrat? Jede Zahl z von 1 bis 25 kann in der Form $z = a \cdot 5 + b$ dargestellt werden, wobei der Rest b nur Werte von 1 bis 5 annehmen darf, z.B. ist $16 = 3 \cdot 5 + 1$ $(a = 3, b = 1)$ oder $15 = 2 \cdot 5 + 5$ $(a = 2, b = 5)$. Die Werte von a und b für eine Zahl z lassen sich aus dem Bild auf der folgenden Seite ablesen, indem man von der Zahl z aus diagonal nach links bzw rechts oben geht, bis man die a- bzw. die b-Werte erreicht. Auf diese Weise lässt sich unser Quadrat in ein a- und ein b-Quadrat zerlegen. Durch die Konstruktionsvorschrift kommt jede Zahl von 0 bis 4 in dem a-Quadrat in jeder Zeile und Spalte genau einmal vor, dies trifft für die Zahlen 1 bis 5 im b-Quadrat ebenfalls zu. Bei zeilenweiser bzw. spaltenweiser Summierung der Zahlen im konstruierten Quadrat muss sich darum immer die gleiche Summe ergeben. Etwas mehr Arbeit erfordert der Beweis, dass auch die Summe auf den Diagonalen magisch ist. Dies ist eine Aufgabe für die Tüftler unter Ihnen.

Die beiden entstehenden Quadrate sind so genannte lateinische Quadrate, auch bei ihnen ist die Summe der Zahlen in jeder Zeile und Spalte gleich, nur taucht jeder Eintrag genau 5 mal auf. Die Quadrate haben überdies eine besondere Eigenschaft: Auf den Feldern, auf denen dieselbe Zahl im a-Quadrat steht, stehen im b-Quadrat jeweils die Zahlen

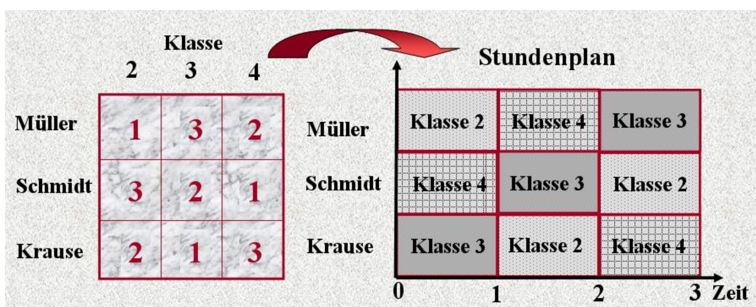


Aus einem magischen Quadrat entstehen zwei lateinische Quadrate

von 1 bis 5. Im Bild ist dies für die Zahl 1 markiert. Man nennt solche lateinische Quadrate orthogonal zueinander.

Allgemein werden in einem lateinischen Quadrat der Ordnung n die Zahlen 1 bis n (oder 0 bis $n-1$) so in den Zeilen und Spalten angeordnet, dass jede Zahl genau einmal in jeder Zeile und Spalte steht. Wenn Sie im Sudoku-Fieber sind, dann kennen Sie zur Genüge lateinische 9x9 Quadrate. Die Bezeichnung *lateinische Quadrate* geht auf den bekannten Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) zurück, der lateinische Buchstaben anstelle von Zahlen verwendete. Euler benutzte lateinische Quadrate für das 36-Offiziersproblem: Für eine Militärparade sollten 36 Offiziere aus 6 verschiedenen Regimentern und mit 6 verschiedenen Dienstgraden so in einem 6x6 Block aufgestellt werden, dass in jeder Zeile und Spalte des Blocks jedes Regiment und jeder Dienstgrad genau einmal vertreten war. Also hatte Euler zwei lateinische Quadrate der Ordnung 6 zu bestimmen, das erste für das Regiment, das zweite für den Dienstgrad. Damit nicht genug, die beiden mussten orthogonal zueinander sein, da aus einem festen Regiment jeder Dienstgrad vorkommen musste. So sehr sich Euler auch mühte, er fand keine zwei zueinander orthogonale Quadrate der Ordnung 6! Erst 200 Jahre später war mathematisch bewiesen: Es gibt zueinander orthogonale Quadrate aller Ordnungen $n > 2$, nur für die Ordnung 6 existieren keine!

Was einst als Spielerei begann, hat heute erfolgreiche mathematische Anwendung auf vielen Gebieten gefunden. Ein Beispiel ist das folgende Stundenplanproblem: Die Klassen 2, 3 und 4 werden von Frau Müller, Frau Schmidt und Herrn Krause in drei verschiedenen Fächern jeweils eine Stunde unterrichtet. Es wird üblicherweise vorausgesetzt, dass in einer Unterrichtsstunde genau ein Lehrer vor genau einer Klasse steht. Es ist ein Stundenplan aufzustellen, der insgesamt wenig Zeit in Anspruch nimmt. Werden alle Unterrichtsstunden hintereinander gegeben, braucht man 9 Stunden und dies ist der schlechteste Stundenplan. Da insgesamt 9 Unterrichtsstunden von 3 Lehrenden zu geben sind, werden mindestens 3 Stunden gebraucht. Eine beste Lösung kann durch ein lateinisches Quadrat mit den Einträgen 1, 2 und 3 beschrieben werden: jede Zeile entspricht einem Lehrer und jede Spalte entspricht einer Klasse. Alle Unterrichtsstunden, denen im Quadrat eine 1 zugeordnet ist, werden zuerst abgehalten, dann folgen alle mit einer 2 und schließlich alle mit einer 3. So einfach sind Stundenpläne, wenn man keine weiteren Nebenbedingungen hat! Erst die vielen zusätzlichen Bedingungen, wie z.B. nicht jeder Lehrer unterrichtet jedes Fach, nicht jeder Lehrer kann zu jedem Zeitpunkt unterrichten, nicht Mathe nach Sport, machen das Problem so schwierig, dass man oft damit zufrieden sein muss, überhaupt eine Lösung zu finden, geschweige denn eine beste!



Ein lateinisches Quadrat führt auf einen optimalen Stundenplan

Probleme vom Stundenplantyp sind in der Wirtschaft sehr verbreitet. Wenn man z.B. in dem kleinen idealen Stundenplan die Klassen als Aufträge und die Lehrer als Maschinen interpretiert, wobei die Bearbeitung eines Auftrags auf einer Maschine genau eine Zeiteinheit dauert, entsteht mit dem besten Stundenplan gerade ein zeitminimaler Bearbeitungsplan der Aufträge auf den Maschinen. Natürlich ist es in der Praxis selten der Fall, dass die Anzahl der Aufträge gerade gleich der Anzahl der Maschinen ist. Dann werden aus den lateinischen Quadraten lateinische Rechtecke. Darüber hinaus werden selten alle Bearbeitungszeiten 1 sein. Weitere Bedingungen kommen hinzu, wie z.B. das

Einhalten von Fälligkeitsterminen für die Aufträge oder die Einplanung von Umrüstzeiten für die Maschinen. Die Aufgabe der Mathematiker besteht dann darin, gemeinsam mit den Technologen alle Bedingungen für den Produktionsablauf zu erfassen und das Ziel der Optimierung festzulegen. Dann sind die Mathematikexperten gefragt, die als erstes die Frage zu beantworten haben: Ist überhaupt eine exakte Lösung des Problems mit Hilfe des Computers in vertretbarer Zeit zu bestimmen? In der überwiegenden Anzahl der Probleme wird dies nicht der Fall sein, also müssen geeignete Algorithmen entwickelt werden, um eine möglichst gute Näherungslösung in einer akzeptablen Zeit zu ermitteln.

Weitere interessante Informationen sind im Internet zu finden: Unter www.geocities.com/ harveyh/ gibt es neben magischen Quadraten auch magische Sterne und magische Kreise. Unter www.trump.de/magic-squares/index.html findet man perfekte magische Würfel, hier haben sogar die Raumdiagonalen die magische Summe! Sehr lesenswert ist auch der Artikel *Edle magische Quadrate* von Ch. Pöppe in *Spektrum der Wissenschaften*, 1, 1996. Eine Fülle von Anwendungen von lateinischen Quadraten sind in dem Buch *Discrete Mathematics Using Latin Squares* von Laywine und Mullen enthalten.

Thesen zur Mathematik

1. *Mathematik ist alles, was uns umgibt.*
2. *Die Definitionen sind die Vokabeln der Mathematik.*
3. *Die Sätze sind die Sprache der Mathematik.*
4. *Die Beweise sind die Perlen der Mathematik.*
5. *Mathematik betreiben ist harte Arbeit.*
6. *Mathematik macht Spaß.*

Heidemarie Bräsel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik
Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg
heidemarie.braesel@math.uni-magdeburg.de

Foto: Karin Lange, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Der mathematische Blick (Teil 6)

„Primzahlen sind der Wahnsinn“

Mathematik ist Überraschung, Abenteuer und Experiment. Professoren der Fakultät für Mathematik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg nehmen das „Jahr der Mathematik" zum Anlass, um dies in einer Beitragsreihe zu veranschaulichen. Im 6. Teil geht es heute um die Faszination von Primzahlen.

Von Prof. Dr. Wolfgang Willems

Briefmarke mit Pierre de Fermat (1601–1665), der herausfand, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für n>2 keine ganzzahligen Lösungen hat.

„Primzahlen sind der Wahnsinn" – unter dieser Überschrift beschrieb Agnieszka Lehmann 2006 ihre Eindrücke über den Film „Der Beweis – Liebe zwischen Genie und Wahnsinn", in dem Gwyneth Paltrow die Tochter eines an Demenz leidenden Mathematikprofessors spielt, der ein Problem über Primzahlen zu lösen versucht.

Ein Jahr später erschien der spanische Film „La habitation de Fermat". In ihm behauptet ein Mathematiker, dass er die berühmte Vermutung von Goldbach, einem preußischen Mathematiker, der zu Beginn des 18. Jahrhunderts lebte, bewiesen habe. Die „Goldbach-Vermutung" besagt, dass jede natürliche Zahl größer oder gleich 4 die Summe von zwei Primzahlen ist. Also nicht nur Mathematiker haben die Primzahlen in ihren Bann gezogen, sondern auch Filmkünstler und viele andere.

Faszinierend, weil wir sie nicht verstehen

Was aber steckt hinter diesen Zahlen, die offenbar eine ungewöhnliche Faszination ausüben?

Primzahlen sind natürliche Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind, wobei wir die 1 aus gewissen Gründen nicht als Primzahl zählen. Die kleinsten aufeinander folgenden Primzahlen sind also

2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Sie sind sozusagen die Bausteine, aus denen alle Zahlen aufgebaut sind, denn jede Zahl ist ein Produkt von Primzahlen, etwa

60 = 2 x 2 x 3 x 5.

Schon der Grieche Euklid, der vor etwa 2300 Jahren in Alexandria lebte, wusste, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Wie man sie findet, hat uns der griechische Mathematiker Eratosthenes von Kyrene wenige Jahrzehnte nach dem Tod von Euklid verraten.

Sein Verfahren wird heute als das „Sieb des Eratosthenes" bezeichnet und funktioniert sehr einfach: Will man alle Primzahlen bis zu einer gewissen Zahl n, etwa n=14 finden, so schreibt man alle Zahlen zwischen 2 und 14 auf.

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

Nun streicht man alle Vielfachen der 2, außer der 2 selbst.

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~

Danach alle Vielfachen der ersten verbleibenden Zahl nach 2, also 3, außer der 3 selbst.

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~

Die nicht gestrichenen Zahlen sind nun bereits alle Primzahlen bis 14, da man nur die Vielfachen derjenigen Primzahlen streichen muss, deren Quadrat kleiner oder gleich n ist. Die Vielfachen der 5 muss man also nicht mehr streichen, da

5 x 5 = 25 größer als 14 ist.

Was aber macht die Primzahlen so interessant?

Die Antwort ist einfach: Wir verstehen sie nicht. Ihr Auftreten scheint vollkommen wirr zu sein. Mal erscheinen sie dicht hintereinander, etwa 3 und 5 oder 5 und 7, und mal gibt es große Lücken, etwa zwischen den Primzahlen 887 und 907 eine Distanz von 19 Zahlen, die alle keine Primzahlen sind. Diese Lücken können sogar beliebig groß werden.

Die Verteilung der Primzahlen hat Bernhard Riemann (1826–1866) in der nach ihm benannten „Riemannschen Hypothese" beschrieben. Es ist eine Aussage über die Nullstellen einer Funktion f, auf die wir hier nicht eingehen können. Es ist ein äußerst schwieriges Problem, da f sehr kompliziert ist, und so gibt es bis heute auch keinen Beweis dafür. Es ist nur eine Vermutung.

Der französische Mathematiker Marin Mersenne (1588–1648).

Was die Mathematiker nun extrem herausfordert, ist die Tatsache, dass viele Sätze in der Mathematik so beginnen: „Wenn die Riemannsche Hypothese gilt, so gilt auch ...". Aber die Hypothese ist nur eine Vermutung, man weiß nicht, ob sie stimmt, auch wenn vieles für ihre Richtigkeit spricht. Man ist also sehr an einem Beweis interessiert, und das Clay Institut in Boston hat dafür ein Preisgeld von einer Million US-Dollar ausgesetzt.

„Einfach nur schön, zu nichts nutze“

Im Zusammenhang mit Primzahlen gibt es aber auch viele einfache interessante Fragestellungen, die bis heute trotz großer Anstrengungen nicht beantwortet werden konnten. Dazu gehören:

1. Gibt es unendlich viele Primzahlen p, für die auch p+2 eine Primzahl ist? Beispiele dafür sind 3 und 5 oder 11 und 13. Sie heißen Primzahlzwillinge.

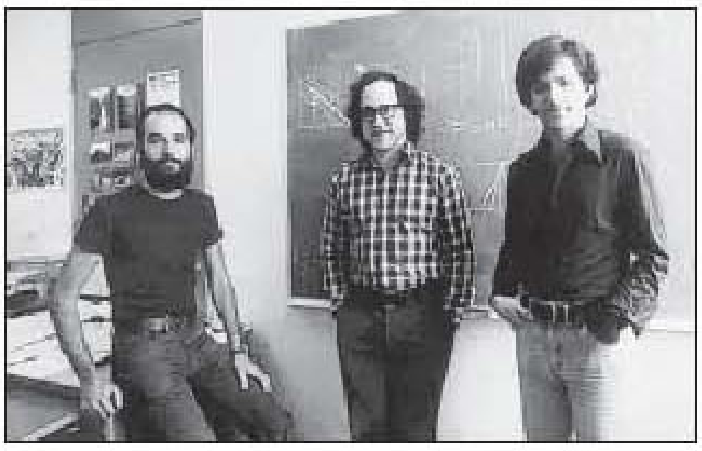
2. Ist jede durch 2 teilbare Zahl, die größer oder gleich 4 ist, die Summe von zwei Primzahlen? Dies ist die zu Anfang erwähnte Vermutung von Goldbach. Beispiele sind: 4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 10=5+5, 12=5+7.

3. Gibt es nur endlich viele Primzahlen der Form 2+1, also k-mal die 2 mit sich selbst multipliziert und 1 addiert? Wir kennen nur fünf:

$3=2^1+1$, $5=2^2+1$, $17=2^4+1$, $257=2^8+1$ und $65537=2^{16}+1$.

Diese Primzahlen heißen nach dem französischen Mathematiker Pierre de Fermat (1601-1665) „Fermatsche Primzahlen". Er formulierte auch den „Satz von Fermat", eine Aussage über die Lösungen einer Gleichung, die die Mathematiker erst 350 Jahre später beweisen konnten.

4. Wie viele Primzahlen der Form 2^k-1, die nach dem französischen Theologen und Mathematiker Marin Mersenne (1588–1648) „Mersennesche Primzahlen" genannt werden, gibt es? Bekannt sind bis heute nur 44. Die größte ist $2^{32582657}-1$ und hat 9 808 358 Dezimalstellen. Sie ist zurzeit die größte bekannte Primzahl. Man kann sie in Bruchteilen einer Sekunde auf einem PC berechnen, aber aufgeschrieben würde sie ein Buch mit mehr als 2000 Seiten füllen.



Im Jahre 1978 haben in der University of Princetown (USA) die Mathematiker Ronald Rivest (M), Adi Shanir (l), und Leonard Adlemann die nach ihnen benannte RSA-Verschlüsselung entdeckt. Damit konnten zum ersten Mal Nachrichten gegen unerlaubtes Lesen geschützt werden.

Was aber haben Primzahlen mit dem wirklichen Leben zu tun?

„Nichts", antwortete Godfrey Hardy (1877-1947), ein bedeutender Mathematiker, der sich speziell mit Zahlen beschäftigte: „Sie sind reine Mathematik, und es ist einfach nur schön, es ist zu nichts nutze." Er hatte zu seinen Lebzeiten sicher recht mit dieser Behauptung, aber seit seinem Tod sind mehr als 60 Jahre vergangen und vieles hat sich im Computer-Zeitalter geändert.

Bei Überweisungen per Homebanking oder Surfen im Internet findet man oft auf dem Bildschirm den Hinweis „RSA verschlüsselt". Dabei steht RSA für die drei Mathematiker Ronald Rivest, Adir Shamir und Leonard Adleman, die 1978 im amerikanischen Princeton, einer Hochburg der Mathematik, die nach ihnen benannte RSA-Verschlüsselung gefunden haben. Verschlüsseln bedeutet, dass man aus einem lesbaren Text einen „Buchstabensalat" macht. So können Nachrichten gegen unerlaubtes Lesen oder Verändern im Internet geschützt werden.

Das RSA-Verfahren lässt sich einfach beschreiben. Jeder Teilnehmer des Kommunikationsnetzes, zum Beispiel „Bob", gibt unter seinem Namen eine Zahl n und eine weitere vorsichtig zu wählende Zahl e wie in einem Telefonbuch öffentlich bekannt. Dabei ist n das Produkt aus zwei sehr großen Primzahlen, etwa p und q, die Bob allerdings streng geheim hält. Will jemand an Bob eine Nachricht senden, so schreibt er diese als eine Folge von Zahlen x, die alle kleiner als n sind. Statt der Zahlen x, also der eigentlichen Nachricht, sendet er Zahlen y, die man als Reste der Division von x durch n erhält. Bob kann dann aus den Zahlen y wegen der Kenntnis der beiden Primzahlen p und q die Zahlen x, also die eigentliche Nachricht, wiedergewinnen.

Wie aber findet man große Primzahlen und wie kann man herausfinden, ob eine gegebene Zahl eine Primzahl ist?

Wer sich ein wenig auskennt, denkt sofort an das „Sieb des Eratosthenes". Leider führt es nicht zum Ziel, wenn die Primzahl sehr groß sein soll, da sogar Supercomputer für das viele Streichen zu lange brauchen. Selbst der 2004 von den drei indischen Mathematikern Manindra Agrawal, Neeraj Kayal und Nitin Saxena gefundene AKS-Algorithmus, der enormes Aufsehen erregte und über den sogar die „New York Times" in großer Aufmachung berichtete, kommt zu keinem Ergebnis.

Der deutsche Mathematiker Bernhard Riemann (1826 bis 1866).

Hier behelfen sich die Mathematiker mit Verfahren, mit denen man zwar nicht exakt feststellen kann, ob eine gegebene große Zahl eine Primzahl ist, aber dies mit einer hohen Wahrscheinlichkeit voraussagen kann. Wenn die vorausgesagte Zahl „wahrscheinlich" eine Primzahl ist, kann man auch das RSA-Verfahren benutzen.

Die perfekte Verschlüsselung

Warum aber kann man nicht doch verschlüsselte Daten, die an Bob gesendet werden, entschlüsseln?

Man müsste dann bei alleiniger Kenntnis von n irgendwie die beiden Primfaktoren p und q von n finden, die aber nur Bob kennt. Ein solches Auffinden der Faktoren nennt man Faktorisieren. Dies kann man aber nicht, wenn p und q sehr groß sind, das heißt, wenn sie mehr als etwa 150 Dezimalstellen haben.

Bis heute gibt es kein allgemeines Verfahren, das in einer angemessenen Zeit bei allen zur Verfügung stehenden Rechner-Resourcen die Primfaktorzerlegung einer Zahl stets berechnen kann. Von 1991 bis 2007 hatte die Firma RSA Laboratories Preisgelder zur Faktorisierung ausgesetzt. Für die größte mit 617 Dezimalstellen bot sie 200 000 US-Dollar. Aber selbst diese Zahl

26062623684139844921529879266674432197085925380486406416164785191859999628542069361450283931914514618683512198164805919882053057222974116478065095809832377336510711545759,

die „nur" 170 Dezimalstellen hat, konnte bis heute nicht faktorisiert werden. Die Sache mit den Primzahlen ist also eine unendliche Geschichte. Primzahlen sind eben „Wahnsinnszahlen".

Lesen Sie am 16. August in dieser Reihe den Beitrag „Millionen Sudoku-Freunde im 729-dimensionalen Raum" von Prof. Dr. Volker Kaibel

MS Wissenschaft in Magdeburg

Wissenschaftsjahr 2008
Mathematik
Alles, was zählt

Im „Jahr der Mathematik 2008" ist die MS Wissenschaft als „Matheschiff" auf Elbe, Rhein und Neckar unterwegs und legt in 31 Städten an. Vom 19. bis 22. August 2008, jeweils 10 bis 19 Uhr macht das 105 Meter lange Binnenfrachtschiff am Magdeburger Petriförder fest. Wissenschaftler der Fakultät für Mathematik halten an jedem dieser Tage um 15 Uhr einen poulärwissenschaftlichen Vortrag.

Auf 600 m² Ausstellungsfläche mit mehr als 30 Exponaten erlebt man Mathematik zum Anfassen, Mitmachen, Mitforschen und Experimentieren. Neben den Ausstellungsbereichen Natur, Technik, Mensch und Geist gibt es Spiele, Filme, Bühnenshows, sowie eine Station des „Känguru"-Wettbewerbs für Knobler und Tüftler. Junge Wissenschaftler sind als Ausstellungslotsen mit dabei.

Das MatheMobil der Magdeburger Universität wird ebenfalls vor Ort sein und unter anderem T-Shirts und Postkarten mit der Aufschrift „Ma(gd)theburg"- anbieten.

www.ms-wissenschaft.de

PRIMZAHLEN SIND DER WAHNSINN

WOLFGANG WILLEMS

Unter dieser Überschrift titelte Agnieszka Lehmann 2006 ihre Rezension über den Film *Der Beweis - Liebe zwischen Genie und Wahnsinn*, in dem Gwyneth Paltrow die Tochter eines an Demenz leidenden Mathematikprofessors spielt, der ein Problem über Primzahlen zu lösen versucht. Ein Jahr später erschien der spanische Film *La habitation de Fermat*. In ihm behauptet ein Mathematiker, er habe die berühmte Vermutung von Goldbach, einem preußischen Mathematiker, der zu Beginn des 18ten Jahrhunderts lebte, bewiesen. Die Primzahlen haben also nicht nur Mathematiker in ihren Bann gezogen, sondern auch Filmkünstler und viele andere.

Was aber steckt hinter diesen Zahlen, die offenbar eine ungewöhnliche Faszination ausüben?

Primzahlen sind natürliche Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind, wobei wir die 1 aus gewissen Gründen nicht als Primzahl zählen. Die kleinsten aufeinander folgenden Primzahlen sind also

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, ...$$

Sie sind sozusagen die Bausteine, aus denen alle Zahlen aufgebaut sind, denn jede Zahl ist ein Produkt von Primzahlen, etwa

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5.$$

Schon der Grieche Euklid, der vor etwa 2300 Jahren in Alexandria lebte, wusste, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Wie man sie findet, hat uns Eratosthenes von Kyrene wenige Jahrzehnte nach dem Tod von Euklid verraten. Sein Verfahren wird heute als das *Sieb des Eratosthenes* bezeichnet und funktioniert sehr einfach. Will man alle Primzahlen bis zu einer gewissen Zahl n, etwa n=15 finden, so schreibt man alle Zahlen zwischen 2 und 15 auf.

$$2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15$$

Nun streicht man alle Vielfachen der 2, außer der 2 selbst.

$$2\ 3\ \cancel{4}\ 5\ \cancel{6}\ 7\ \cancel{8}\ 9\ 1\cancel{0}\ 11\ 1\cancel{2}\ 13\ 1\cancel{4}\ 15$$

Danach alle Vielfachen der ersten verbleibenden Zahl nach 2, also 3, außer der 3 selbst.

$$2\ 3\ \cancel{4}\ 5\ \cancel{6}\ 7\ \cancel{8}\ \cancel{9}\ 1\cancel{0}\ 11\ 1\cancel{2}\ 13\ 1\cancel{4}\ 1\cancel{5}$$

Die nicht gestrichenen Zahlen sind nun bereits alle Primzahlen bis 15, da man nur die Vielfachen derjenigen Primzahlen streichen muss, deren Quadrat kleiner oder gleich n ist. Die Vielfachen der 5 muss man also nicht mehr streichen, da $5 \times 5 = 25$ größer als 15 ist.

Was aber macht sie so interessant?

Die Antwort ist einfach: *Wir verstehen sie nicht.* Ihr Auftreten scheint vollkommen wirr zu sein; mal erscheinen sie dicht hintereinander, etwa 3 und 5 oder 5 und 7; mal gibt es große Lücken, etwa zwischen den Primzahlen 887 und 907 eine Lücke von 19 Zahlen, die alle keine Primzahlen sind. Diese Lücken können sogar beliebig groß werden.

Bernhard Riemann

Die Verteilung der Primzahlen hat Bernhard Riemann (1826-1866) in der nach ihm benannten *Riemannschen Hypothese* beschrieben. Es ist eine Aussage über die Nullstellen der sog. Zetafunktion $\zeta(z)$, auf die wir hier nicht eingehen können. Es ist ein äußerst schwieriges Problem, da $\zeta(z)$ sehr kompliziert ist, und so gibt es bis heute auch keinen Beweis dafür. Es ist nur eine Vermutung. Was die Mathematiker nun extrem herausfordert, ist die Tatsache, dass viele Sätze in der Mathematik beginnen:

Wenn die Riemannsche Hypothese gilt, so gilt auch …

Aber die Hypothese ist nur eine Vermutung, man weiß nicht, ob sie stimmt, auch wenn vieles für ihre Richtigkeit spricht. Man ist also sehr an einem Beweis interessiert, und das Clay Institut in Boston hat dafür ein Preisgeld von einer Million US-Dollar ausgesetzt.

Im Zusammenhang mit Primzahlen gibt es aber auch sehr viele einfache interessante Fragestellungen, die bis heute trotz großer Anstrengungen nicht beantwortet werden konnten, etwa:

1. *Gibt es unendlich viele Primzahlen p, für die auch $p + 2$ eine Primzahl ist?*

Beispiele dafür sind 3 und 5 oder 11 und 13. Sie heißen Primzahlzwillinge.

2. *Ist jede durch* 2 *teilbare Zahl, die größer oder gleich* 4 *ist, die Summe von zwei Primzahlen?*
Dies ist die zu Anfang erwähnte Vermutung von Goldbach. Etwa:
$4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5, 10 = 5 + 5$, $12 = 5 + 7, \ldots$

3. *Gibt es nur endlich viele Primzahlen der Form* $2^k + 1$, *also* k*-mal die* 2 *mit sich selbst multipliziert und* 1 *addiert?*
Wir kennen nur fünf:
$3 = 2^1 + 1$, $5 = 2^2 + 1$, $17 = 2^3 + 1$, $257 = 2^4 + 1$ und $65537 = 2^5 + 1$.
Diese Primzahlen heißen nach dem französischen Mathematiker Pierre de Fermat (1601-1665) Fermatsche Primzahlen.

Briefmarke Pierre de Fermat

Er formulierte auch den *großen Fermatschen Satz*, der besagt, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ keine ganzzahligen Lösungen x, y, z hat.

Diese Aussage konnten die Mathematiker erst Mitte der 90ziger Jahre des letzten Jahrhunderts beweisen, also 350 Jahre nach der Entdeckung von Fermat.

4. *Wie viele Primzahlen der Form* $2^k - 1$ *gibt es?*

Marin Mersenne

Sie werden nach dem französischen Theologen und Mathematiker Marin Mersenne (1588-1648) auch Mersennesche Primzahlen genannt. Bekannt sind bis heute nur 47 von diesen. Die größte ist $2^{43112609} - 1$ und hat 12987189 Dezimalstellen. Sie ist z.Zt. die größte bekannte Primzahl und wurde 2008 entdeckt. Man kann sie in Bruchteilen einer Sekunde auf einem PC berechnen und ein Aufschreiben würde ein Buch mit mehr als 3000 Seiten füllen.

Was aber haben Primzahlen mit dem wirklichen Leben zu tun?

Godfrey Hardy (1877-1947), ein bedeutender Mathematiker, der sich speziell mit Zahlen beschäftigte, antwortete darauf : *Nichts, es ist Reine Mathematik, es ist einfach nur schön, es ist zu nichts nutze.* Er hatte zu seinen Lebzeiten sicher recht mit dieser Behauptung, aber seit seinem Tod sind mehr als 60 Jahre vergangen, und vieles hat sich im Computer-Zeitalter geändert.

Bei Überweisungen per Homebanking oder Surfen im Internet findet man oft auf dem Bildschirm den Hinweis *RSA verschlüsselt.* Dabei steht **RSA** für die drei Mathematiker Ronald **R**ivest, Adi **S**hamir und Leonard **A**dleman, die 1978 im amerikanischen Princeton, einer Hochburg der Mathematik, die nach ihnen benannte RSA-Verschlüsselung gefunden haben.

A. Shamir, R. Rivest, L. Adleman (von links)

Verschlüsseln bedeutet, dass man aus einem lesbaren Text einen Buchstabensalat, also einen nicht verständlichen Text macht. So können Nachrichten gegen unerlaubtes Lesen oder Verändern im Internet geschützt werden.

Das RSA-Verfahren lässt sich einfach beschreiben. Jeder Teilnehmer des Kommunikationsnetzes, so auch Bob, gibt unter seinem Namen eine Zahl n und eine weitere vorsichtig zu wählende Zahl e etwa in einem Buch, ähnlich dem Telefonbuch, öffentlich bekannt. Dabei ist n das Produkt aus zwei sehr großen Primzahlen, etwa p und q, die Bob allerdings streng geheim hält. Will Alice an Bob eine Nachricht senden, so schreibt sie diese als eine Folge von Zahlen x, die alle kleiner als n sind (Alice kennt n aus dem Eintrag von Bob im Telefonbuch.) Statt der Zahlen x, also der eigentlichen Nachricht, sendet sie Zahlen y, die sie als Reste der Division von x^e durch n erhält. (Man beachte, dass Alice aus dem Telefonbuch auch e kennt.) Bob kann dann aus den Zahlen y wegen der Kenntnis der beiden Primzahlen p und q die Zahlen x, also die eigentliche Nachricht, wiedergewinnen.

Wie aber findet man große Primzahlen, oder anders gefragt, wie kann man herausfinden, ob eine gegebene Zahl eine Primzahl ist?

Man denkt hier sofort an das Sieb des Eratosthenes. Leider führt es nicht zum Ziel, wenn die Primzahl sehr groß sein soll, da selbst Supercomputer für das viele Streichen zu lange brauchen. Selbst der 2004 von den drei Indern **A**grawal, **K**ayal und **S**axena gefundene **AKS**-Algorithmus, der nach seiner Entdeckung enormes Aufsehen erregte und in der *New York Times* in großer Aufmachung erschien, kommt zu keinem Ergebnis. Hier behelfen sich die Mathematiker mit Verfahren, mit denen man zwar nicht exakt feststellen kann, ob eine gegebene große Zahl eine Primzahl ist, aber mit einer hohen Wahrscheinlichkeit. Dann ist sie wahrscheinlich auch eine Primzahl und man kann sie im RSA-Verfahren benutzen.

Zurück zum Problem der Datenverschlüsselung.

Warum kann man nicht doch verschlüsselte Daten, die an Bob gesendet werden, entschlüsseln?

Man müsste dann bei alleiniger Kenntnis von n irgendwie die beiden Primfaktoren p und q von n finden, die aber nur Bob kennt. Ein solches Auffinden der Faktoren nennt man Faktorisieren. Dies kann man aber nicht, wenn p und q sehr groß sind, d.h. wenn sie mehr als etwa 150 Dezimalstellen haben. Oder anders gesagt: Bis heute gibt es kein allgemeines Verfahren, dass in einer angemessenen Zeit bei allen zur Verfügung stehenden Rechner-Resourcen die Primfaktorzerlegung einer Zahl stets berechnen kann. Von 1991 bis 2007 hatte die Firma RSA Laboratories Preisgelder zur Faktorisierung ausgesetzt. Für die Größte mit 617 Dezimalstellen bot sie 200000 US-Dollar. Aber selbst

2606262368413984492152987926667443219708592538048640641616 4
785191859999628542069361450283931914514618683512198164805919 8
82053057222974116478065095809832377336510711545759,

eine Zahl mit nur 170 Dezimalstellen konnte bis heute nicht faktorisiert werden.

Die Sache mit den Primzahlen ist also eine endlose Geschichte. Primzahlen sind eben *Wahnsinnszahlen*.

Mathematik ist u.a. die Kunst, Wesentliches zu erkennen, dieses zu strukturieren und aus den Strukturen dann Aussagen abzuleiten.

Otto-von-Guericke Universität Magdbeurg, Fakultät für Mathematik, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg

E-mail address: `willems@ovgu.de`

Das rätselhafte „Hotel Sudoku“

Mathematik ist Überraschung, Abenteuer und Experiment. Professoren der Fakultät für Mathematik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg nehmen das „Jahr der Mathematik“ zum Anlass, um dies in einer Beitragsreihe zu veranschaulichen. Im 7. Teil geht es heute um die Mathematik im Sudoku-Rätsel.

Von **Prof. Dr. Volker Kaibel**

Werner von Siemens, der Stadt Magdeburg wegen einer kurzen Inhaftierung in der Zitadelle verbunden, hat es bereits erkannt: „Ohne Mathematik tappt man doch immer nur im Dunkeln.“ Das stimmte sicher für seine Arbeit in einem der ersten Telekommunikationsunternehmen, der von ihm mit gegründeten „Telegraphenbau-Anstalt von Siemens & Halske“. Aber wie ist das im täglichen Leben, wenn man zum Beispiel Sudoku-Rätsel löst? Kann man diese Rätsel überhaupt als mathematische Probleme formulieren, zum Beispiel mit Hilfe von Gleichungen?

Man kann, und es lohnt sich. Denn das führt nicht nur zu faszinierenden geometrischen Gebilden, die seit mehr als zweitausend Jahren untersucht werden, sondern auch zu Mathematik, ohne die man in schlüsseltechnologischen Anwendungen wie der Telekommunikation heute noch im Dunkeln tappen würde.

Suche nach der exakten Zimmerbelegung

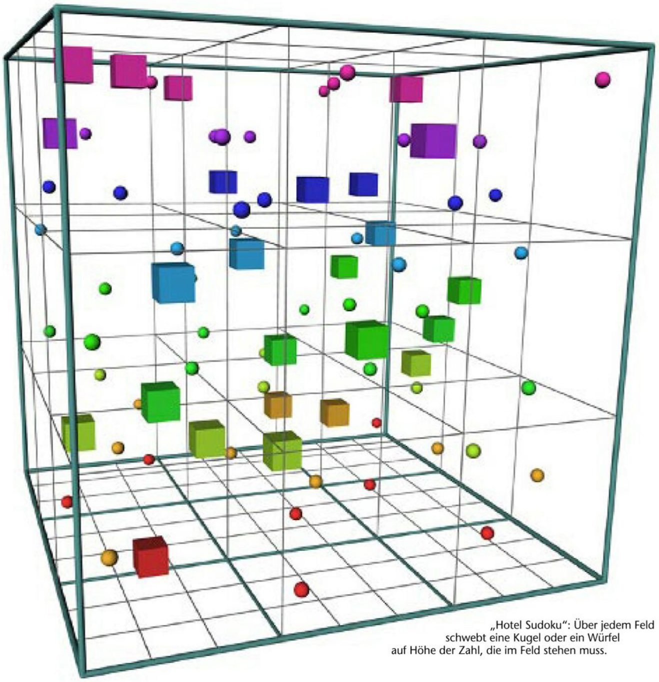
Um die Sudoku-Regeln als Gleichungen zu formulieren, ist es nützlich, sich zunächst einmal ein fertiges Sudoku-Rätsel anzusehen – zum Beispiel auf der letzten Seite dieses Magazins. Neun mal neun im Quadrat angeordnete Felder sind so mit den Zahlen Eins bis Neun ausgefüllt, dass jede Zahl in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem von neun ausgezeichneten Unterquadraten der Größe drei mal drei genau einmal vorkommt.

Errichtet man über dem Quadrat nun ein neunstöckiges Haus mit neun mal neun Zimmern in jeder Etage, so kann man das fertige Sudoku-Rätsel darstellen, indem man über jedem Feld in das Zimmer auf der Etage, welche durch die Zahl im Feld beschrieben wird, eine Kugel oder einen Würfel platziert. Ein Würfel soll dabei anzeigen, dass die Zahl im entsprechenden Feld vorgegeben war. Kugeln repräsentieren die Felder, welche die erfolgreiche Sudoku-Löserin ausgefüllt hat.

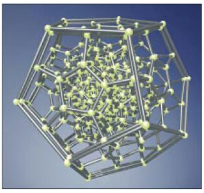
Was unterscheidet jetzt eine korrekte Sudoku-Belegung der 729 Zimmer von einer beliebigen Belegung des „Hotels Sudoku“? Für eine korrekte Sudoku-Lösung muss in jeder Etage in jeder Zeile von Zimmern genau eins belegt sein. Das Gleiche gilt in jeder Etage für jede Spalte von Zimmern sowie für jeden der Zimmerblöcke über einem der drei mal drei Unterquadrate. Außerdem sollte über jedem Feld genau eines der neun Zimmer belegt sein.

Um die Zimmerbelegung mathematisch zu formulieren, vergibt man nun an die Zimmer die Nummern 1 bis 729 und schreibt in eine Liste für jede Zimmernummer eine Eins, wenn das Zimmer belegt ist, und eine Null, wenn es frei ist. Jetzt kann man die Sudoku-Bedingungen leicht als Gleichungen formulieren: Dass in der Zimmersäule über einem bestimmten Feld genau ein Zimmer belegt sein muss, heißt beispielsweise, dass sich die Zahlen für die neun Zimmernummern einer Säule genau zu Eins aufsummieren müssen (d h. eine der Zahlen ist Eins, die anderen acht sind Null). Insgesamt erhält man 324 (81 plus neun mal drei mal neun) Gleichungen.

Für ein ungelöstes Sudoku-Rätsel notiert man in der Liste bei den Zimmernummern, für die man noch nicht weiß, ob das Zimmer belegt sein wird, statt einer Eins oder einer Null eine nur für dieses Zimmer zuständige Variable. Die 324 Gleichungen bilden dann ein Gleichungssystem mit 729 minus neun mal der Anzahl der vorgegebenen Einträge vielen Variablen.



„Hotel Sudoku“: Über jedem Feld schwebt eine Kugel oder ein Würfel auf Höhe der Zahl, die im Feld stehen muss.



Links: Dreidimensionales Bild eines vierdimensionalen Würfels, der von acht dreidimensionalen Würfeln begrenzt ist. Der innere und der äußere Würfel sind gut zu erkennen, vorderer, hinterer, unterer, oberer, linker und rechter Begrenzungswürfel sind verzerrt.
Rechts: Das 120-Zell – ein vierdimensionales Polyeder, das von 120 Dodekaedern begrenzt wird.

Gleichungssysteme (wenn auch mit weniger Variablen und Gleichungen) lösen schon Schüler. Also sind Sudoku-Rätsel mit Hilfe von Schulmathematik lösbar?

Ganz so einfach ist es nicht, denn nicht jede Lösung des Gleichungssystems liefert tatsächlich einen Zimmerbelegungsplan, sondern nur solche Lösungen, in denen alle Variablen nur die Werte Null und Eins annehmen. Das kann man in unserem Beispiel mit Ungleichungen der Art „Variable größer oder gleich Null“ und der Einschränkung auf ganzzahlige Lösungen ausdrücken.

Auch ohne Beachtung der Ganzzahligkeitsbedingungen ist die Bestimmung von Lösungen von Systemen, die Ungleichungen enthalten, oder gar das Auffinden einer besten Lösung aufwändiger als das Lösen von Gleichungssystemen. Das heute wichtigste Verfahren für solche linearen Optimierungsprobleme, der Simplex-Algorithmus, wurde von George B. Dantzig Mitte der 40er Jahre des 20. Jahrhunderts entwickelt. Die lineare Optimierung wurde in der Folge zu einem für die industrielle und auch militärische Planung enorm wichtigen Werkzeug.

Als im Jahr 1979 der sowjetische Mathematiker Leonid Khachiyan den ersten in einem streng mathematischen Sinn effizienten Algorithmus für lineare Optimierungsprobleme präsentierte, berichtete sogar die „New York Times“ auf der Titelseite von dieser Entdeckung.

Die Schönheit der Platonischen Körper

Der Übergang von Gleichungen zu Ungleichungen führt aber nicht nur zu komplizierteren Algorithmen und in wichtige Anwendungsbereiche, sondern auch zu schönen geometrischen Objekten. Versieht man ein Blatt Papier mit einem aus einer x-und einer y-Achse bestehenden Koordinatensystem, so entspricht jedem Punkt auf dem Blatt ein Paar von x- und y-Koordinaten. Jedes Lösungspaar eines gegebenen linearen Ungleichungssystems mit den beiden Variablen x und y beschreibt also einen Punkt auf dem Blatt. Die Menge aller Lösungspunkte bildet dann ein (ausgefülltes) Polygon, wie zum Beispiel ein Dreieck oder ein Viereck.

Um die Lösungsmengen von linearen Ungleichungssystemen mit drei Variablen zu visualisieren, braucht man anstelle des Blatts Papier unseren dreidimensionalen Umgebungsraum. Die Lösungsmengen sind dann Polyeder. Die gleichmäßigsten und schönsten unter diesen Polyedern faszinieren Mathematiker, Philosophen und Künstler seit über 2000 Jahren: Es sind die fünf Platonischen Körper Tetraeder, Dodekaeder, Ikosaeder, Oktaeder und Würfel.

Da das System aus Gleichungen und Ungleichungen, mit dem die Sudoku-Lösungen beschrieben werden, 729 Variablen besitzt, entspricht seine Lösungsmenge einem Polyeder im 729-dimensionalen Raum.

Diese hochdimensionalen Objekte sind natürlich nicht mehr unmittelbar sichtbar wie die Platonischen Körper. Dennoch kann man auch von mehr als dreidimensionalen Polyedern interessante und schöne Bilder produzieren. Vor allem vierdimensionale Polyeder lassen sich wunderbar dreidimensional darstellen, ähnlich wie man einen dreidimensionalen Würfel auf einem Blatt Papier sichtbar machen kann, indem man ein perspektivisches Bild eines würfelförmigen Raumes zeichnet.

Systeme mit Millionen von Variablen

Dem Rätselfreund, der über einem schwierigen Sudoku brütet, hilft das alles nun nicht unmittelbar, es sei denn, er greift auf die mittlerweile mit Hilfe vieler mathematischer Erkenntnisse der vergangenen Jahrzehnte entwickelte Software zum Lösen ganzzahliger linearerOptimierungsprobleme zurück. Aber das will man als Rätselfreund wahrscheinlich gar nicht.

Die mathematischen Methoden sind natürlich auch nicht für Sudoku-Rätsel entwickelt worden. Vielmehr kann man in ganz ähnlicher Weise wie beim Sudoku eine Vielzahl von Problemen in Bereichen wie Produktionsplanung, Logistik, Verkehr oder auch Telekommunikation mathematisch modellieren und lösen. Dabei treten dann allerdings oft Systeme mit Hunderttausenden oder gar Millionen von Variablen und Ungleichungen auf.

Eines der Probleme, die Mobilfunknetzbetreiber zu lösen haben, ist zum Beispiel die Zuordnung von möglichst wenigen Frequenzen auf Sendestationen, ohne dass benachbarte Stationen auf der gleichen Frequenz senden, was Interferenzen erzeugen würde. Dieses Problem ist dem Sudoku sogar sehr verwandt.

Praktikable Lösungsverfahren für solche Probleme kann man nur entwerfen, wenn Mathematiker durch Untersuchung der dahinter stehenden hochdimensionalen Polyeder zuvor genügend Licht ins Dunkle gebracht haben. Werner von Siemens würde sich darüber sicher nicht wundern.

Lesen Sie in dieser Reihe am 13. September den Beitrag „Was die Mathematik vom Wasser lernen kann“ von Prof. Dr. Hans-Christoph Grunau.

MS Wissenschaft legt für 4 Tage in Magdeburg an

Das Ausstellungsschiff MS Wissenschaft macht vom 19. bis 22. August am Petriförder in Magdeburg Station (bei Niedrigwasser an der Schleuse Rothensee). Die Ausstellung zeigt, dass Mathematik nicht nur ein Schulfach ist, sondern unser Leben in vielfach beeinflusst. Ob Routenplanung, Online-Banking oder Einkauf – viele Dinge des Alltags wären ohne Mathematik gar nicht möglich. Mehr als 30 interaktive Exponate zeigen spielerisch die Anwendung mathematischer Forschung. Fragen wie „Kann Statistik lügen?“ oder „Wie hängt man ein Bild auf?“ werden ebenso beantwortet wie die, ob Geiz wirklich „geil“ ist. Die Ausstellung ist so angelegt, dass vieles schon Achtjährige verstehen können.

Die Fakultät für Mathematik der Otto-von-Guericke-Universität bietet ergänzend täglich um 15 Uhr an Bord ein Vortragsprogramm an:

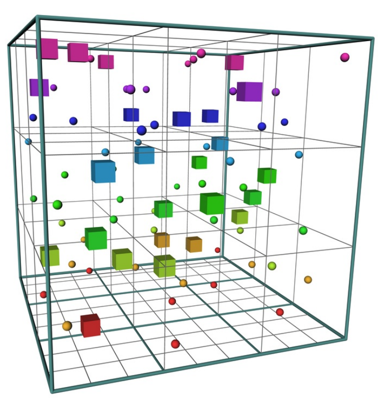
- 19.8.: Bezaubernde Mathematik – Zaubereien, Rätsel und Tricks mit Zahlen und Figuren (Prof. Dr. Herbert Henning)
- 20.8.: Curve shortening Flow – der schnellste Weg zur kürzesten Verbindung (Prof. Dr. Klaus Deckelnick)
- 21.8.: Sudoku, Plato, Telefon (Prof. Dr. Volker Kaibel)
- 22.8.: Am Anfang stand der Abacus – Historisches zur Entwicklung der Rechenhilfsmittel (Prof. Dr. Herbert Henning)

www.ms-wissenschaft.de

Sudoku im 729-Dimensionalen Raum

VOLKER KAIBEL

Werner von Siemens, der Stadt Magdeburg wegen einer kurzen Inhaftierung in der Zitadelle verbunden, hat es bereits erkannt: „Ohne Mathematik tappt man doch immer nur im Dunkeln." Das stimmte sicher für seine Arbeit in einem der ersten Telekommunikationsunternehmen, der von ihm mitbegründeten „Telegraphenbau-Anstalt von Siemens & Halske". Aber wie ist das im täglichen Leben? Zum Beispiel beim Lösen von Sudokurätseln ? Kann man diese Rätsel überhaupt als mathematische Probleme formulieren, zum Beispiel mit Hilfe von Gleichungen? Man kann, und es lohnt sich. Denn das führt nicht nur zu faszinierenden geometrischen Gebilden, die seit mehr als zweitausend Jahren untersucht werden, sondern auch zu Mathematik, ohne die man in schlüsseltechnologischen Anwendungen wie der Telekommunikation heute noch im Dunkeln tappen würde.



Hotel Sudoku

Um die Sudokuregeln als Gleichungen zu formulieren, ist es nützlich, sich zunächst einmal ein fertiges Sudokurätsel anzusehen, also neun mal neun im Quadrat angeordnete Felder, welche so mit den Zahlen Eins bis Neun ausgefüllt sind, dass jede Zahl in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem von neun ausgezeichneten Unterquadraten der Größe drei mal drei genau einmal vorkommt. Errichtet man über dem Quadrat nun ein neunstöckiges Haus mit neun mal neun Zimmern in jeder Etage, so kann man das fertige Sudokurätsel darstellen, indem man über jedem Feld in das Zimmer auf der Etage, welche durch die Zahl im Feld beschrieben wird, eine Kugel oder einen Würfel platziert. Ein Würfel soll dabei nur anzeigen, dass die Zahl im entsprechenden Feld vorgegeben war. Kugeln repräsentieren also die Felder, welche die erfolgreiche Sudokulöserin ausgefüllt hat.

Was unterscheidet jetzt eine einer korrekten Sudokulösung entsprechende Belegung der 729 Zimmer von einer beliebigen Belegung des „Hotel Sudoku"? Für eine korrekte Sudokulösung muss in jeder Etage in jeder Zeile von Zimmern genau eines belegt sein. Das Gleiche gilt in jeder Etage für jede Spalte von Zimmern sowie für jeden der Zimmerblöcke über einem der drei mal drei Unterquadrate. Außerdem sollte über jedem Feld genau eines der neun Zimmer belegt sein.

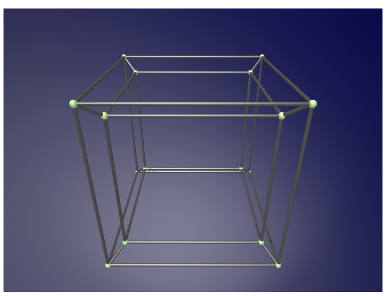
Um die Zimmerbelegung mathematisch zu formulieren, vergibt man nun an die Zimmer die Nummern Eins bis 729 und schreibt in eine Liste für jede Zimmernummer eine Eins, wenn das Zimmer belegt ist, und eine Null, wenn es frei ist. Jetzt kann man die Sudokubedingungen leicht als Gleichungen formulieren: Dass in der Zimmersäule über einem bestimmten Feld genau ein Zimmer belegt sein muss, heißt beispielsweise, dass die Zahlen, welche in der Belegungsliste für die neun Zimmernummern, die zu der Säule gehören, notiert sind, sich genau zu Eins aufsummieren müssen (d.h. eine der Zahlen ist Eins, die anderen acht sind Null). Insgesamt erhält man 324 (81 plus neun mal drei mal neun) Gleichungen.

Für ein ungelöstes Sudokurätsel notiert man in der Liste bei den Zimmernummern, für die man noch nicht weiß, ob das Zimmer belegt sein wird, statt einer Eins oder einer Null eine nur für dieses Zimmer zuständige Variable. Die 324 Gleichungen bilden dann ein Gleichungssystem mit 729 minus neun mal der Anzahl der vorgegebenen Einträge vielen Variablen.

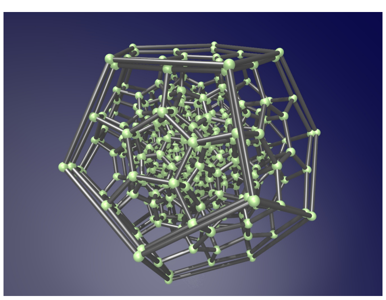
Gleichungssysteme (wenn auch mit weniger Variablen und Gleichungen) lösen schon Schüler. Also sind Sudokurätsel mit Hilfe von Schulmathematik lösbar? Ganz so einfach ist es nicht, denn nicht jede Lösung des Gleichungssystems liefert tatsächlich einen Zimmerbelegungsplan, sondern nur solche Lösungen, in denen alle Variablen nur die Werte Null und Eins annehmen. Das kann man in unserem Beispiel mit Ungleichungen der Art „Variable größer oder gleich Null" und der Einschränkung auf ganzzahlige Lösungen ausdrücken.

Auch ohne Beachtung der Ganzzahligkeitsbedingungen ist die Bestimmung von Lösungen von Systemen, die Ungleichungen enthalten, oder gar das Auffinden einer besten Lösung aufwändiger als das Lösen von Gleichungssystemen. Das heute wichtigste Verfahren für solche linearen Optimierungsprobleme, der Simplex-Algorithmus, wurde von George B. Dantzig Mitte der 40er Jahre des 20. Jahrhunderts entwickelt. Die lineare Optimierung wurde in der Folge zu einem für die industrielle und auch militärische Planung enorm wichtigen Werkzeug. Als im Jahr 1979 der sowjetische Mathematiker Leonid Khachiyan den ersten in einem streng mathematischen Sinn effizienten Algorithmus für lineare Optimierungsprobleme präsentierte, berichtete sogar die New York Times auf der Titelseite von dieser Entdeckung.

Der Übergang von Gleichungen zu Ungleichungen führt aber nicht nur zu komplizierteren Algorithmen und in wichtige Anwendungsbereiche, sondern auch zu schönen geometrischen Objekten. Versieht man ein Blatt Papier mit einem aus einer x-und einer y-Achse bestehenden Koordinatensystem, so entspricht jedem Punkt auf dem Blatt ein Paar von x- und y-Koordinaten. Jedes Lösungspaar eines gegebenen linearen Ungleichungssystems mit den beiden Variablen x und y beschreibt also einen Punkt auf dem Blatt. Die Menge aller Lösungspunkte bildet dann ein (ausgefülltes) Polygon, wie zum Beispiel ein Dreieck oder ein Viereck. Um die Lösungsmengen von linearen Ungleichungssystemen mit drei Variablen zu visualisieren, braucht man anstelle des Blatts Papier unseren dreidimensionalen Umgebungsraum. Die Lösungsmengen sind dann Polyeder. Die gleichmäßigsten unter diesen Polyedern faszinieren Mathematiker, Philosophen und Künstler seit über 2000 Jahren: die fünf Platonischen Körper Tetraeder, Dodekaeder, Ikosaeder, Oktaeder und Würfel.



Würfel (4D)



120-Zell (4D)

Da das System aus Gleichungen und Ungleichungen, mit dem die Sudokulösungen beschrieben werden, 729 Variablen besitzt, entspricht seine Lösungsmenge einem Polyeder im 729-dimensionalen Raum. Diese hochdimensionalen Objekte sind natürlich nicht mehr unmittelbar sichtbar wie die Platonischen Körper. Dennoch kann man auch von mehr als dreidimensionalen Polyedern interessante und schöne Bilder produzieren. Vor allem vierdimensionale Polyeder lassen sich wunderbar dreidimensional darstellen, ähnlich wie man einen dreidimensionalen Würfel auf einem Blatt Papier sichtbar machen kann, indem man ein perspektivisches Bild eines würfelförmigen Raumes von einer Eingangstür aus zeichnet.

Dem Rätselfreund, der über einem schwierigen Sudoku brütet, hilft das alles nun nicht unmittelbar, es sei denn, er greift auf die mittlerweile mit Hilfe vieler mathematischer Erkenntnisse der vergangenen

Jahrzehnte weit entwickelte Software zum Lösen ganzzahliger linearer Optimierungsprobleme zurück. Aber das will man als Rätselfreund wahrscheinlich gar nicht. Die mathematischen Methoden sind natürlich auch nicht für Sudokurätsel entwickelt worden. Vielmehr kann man in ganz ähnlicher Weise wie beim Sudoku eine Vielzahl von Problemen in Bereichen wie Produktionsplanung, Logistik, Verkehr oder auch Telekommunikation mathematisch modellieren und lösen. Dabei treten dann allerdings oft Systeme mit Hundertausenden oder gar Millionen von Variablen und Ungleichungen auf. Eines der Probleme, die Mobilfunknetzbetreiber zu lösen haben, ist zum Beispiel die Zuordnung von möglichst wenigen Frequenzen auf Sendestationen, ohne dass benachbarte Stationen auf der gleichen Frequenz senden, was Interferenzen erzeugen würde. Dieses Problem ist dem Sudoku sogar sehr verwandt.

Praktikable Lösungsverfahren für solche Probleme kann man nur entwerfen, wenn Mathematiker durch Untersuchung der dahinter stehenden hochdimensionalen Polyeder zuvor genügend Licht ins Dunkle gebracht haben. Werner von Siemens würde sich darüber sicher nicht wundern.

Ohne Mathematik würden wir die Welt nicht wiedererkennen.

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdburg, Fakultät für Mathematik, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg
E-mail address: kaibel@ovgu.de

Volksstimme vom 13.09.2008

Der mathematische Blick (Teil 8)

Was Mathematik vom Wasser lernt

Mathematik ist Überraschung, Abenteuer und Experiment. Professoren der Fakultät für Mathematik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg nehmen das „Jahr der Mathematik" zum Anlass, um dies in einer Beitragsreihe zu veranschaulichen. Im 8. Teil geht es heute um den Weg des Wassers und dessen Wegweisung für die Mathematik.

Von **Prof. Dr. Hans-Christoph Grunau**

Wasser ist belebend und anregend, in jeder Hinsicht; der Faszination von Wasserfällen oder Meeresbrandung kaum sich kaum jemand entziehen. Aber auch Wasser, das in Ruhe ist oder sich bestenfalls in Zeitlupentempo bewegt, übt eine starke Anziehungskraft aus und lädt ein zum Meditieren und Nachdenken. Auch die Mathematik hat stets sehr von der inspirierenden Wirkung von Wasser profitiert.

Bei einer Wanderung in den Zermatter Bergen lädt der Riffelsee (Bild 1) zu einer Pause. Mathematiker fragen sich beim Anblick einer solchen Szenerie sofort: Warum sammelt sich das Wasser hier? Die Erklärung ist denkbar einfach: Hier ist eine Senke im Boden. Und wie kommt das Wasser dorthin? Ein Blick in die Bergwelt hilft weiter: Die Gletscher zeigen es im Zeitlupentempo. Wasser wählt immer den direkten Weg bergab, auch im gefrorenen Zustand.

Diese Beobachtungen führen direkt zu einem Teilgebiet der angewandten Mathematik, zur „Variationsrechnung". Eine für diese Disziplin typische Fragestellung, an deren Beantwortung auch Mathematiker aus dem Institut für Analysis und Numerik der Otto-von-Guericke-Universität in Magdeburg arbeiten, soll im Folgenden vorgestellt werden, nämlich, wie sich die Beobachtungen des wandernden Mathematikers in eine Lösungsstrategie umsetzen lassen.

Energiesparende Wasser-Ansammlung

Um das grundlegende Prinzip zu verstehen, das für die Existenz des Riffelsees an genau dieser Stelle verantwortlich ist, müssen wir zunächst die Beobachtungen auf den Kern reduzieren. Jedermann ist durch alltägliche Erfahrung vertraut, was in einem einfachen Wohnzimmer-Experiment mit Hilfe einer Obstschale nachgestellt wird (Bild 2). Es steht fest: Wasser sammelt sich stets an der tiefsten Stelle. Denn: Dadurch wird die Energie des Wassers soweit wie möglich minimiert. Es kostet Energie, Dinge gegen die Erdanziehungskraft auf die Höhe zu bringen. Und möglichst viel von dieser Energie wird wieder frei, wenn das Wasser sich soweit wie möglich nach unten bewegt.

Bevor dieses physikalische Prinzip an einem weniger einfachen Beispiel weiterverfolgt wird, soll es zunächst genauer durchdacht werden. Das Experiment wird in einem Abstraktionsschritt mathematisch modelliert werden: Die Ähnlichkeit des vom Computer mit Hilfe eines Mathematikprogramms erzeugten Bildes mit dem Wohnzimmerexperiment liegt auf der Hand (Bild 3).

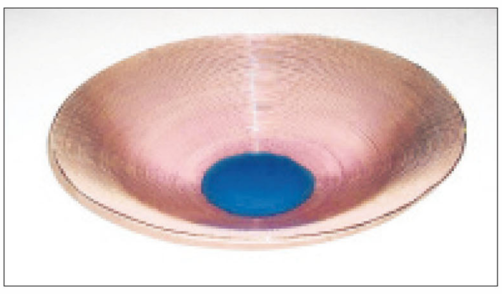
Das mathematische Modell beschreibt das Experiment sehr gut und hat den Vorteil, dass es nun berechenbare Vorhersagen ermöglicht. Die Position des „Wohnzimmersees" lässt sich leicht voraussagen, indem man den kleinsten Wert der Funktion in Bild 3 berechnet: Wo ist die Höhe in der Grafik über der waagerecht darunter liegenden „Koordinaten"-Ebene so klein wie möglich? Manch einer wird sich dabei an die Kurvendiskussion im Schulunterricht erinnern.

Nun bedarf es nur noch eines weiteren Abstraktionsschrittes, um scheinbar ganz andere Fragen behandeln zu können. Viele Mathematiker beschäftigen sich gegenwärtig damit, Modelle für elastische Flächen zu untersuchen. Elastisches Material ist zum Beispiel Metall oder bearbeitetes Holz. Um solche Flächen (Platten, Latten oder Bretter) zu verformen, muss man Energie aufwenden. Bei elastischem Material kann man diese Energie bei Entspannung, also Rückkehr in den Ausgangszustand, zurückgewinnen. Spielzeuge wie Katapulte oder Trampoline, Sprungbretter, Schwingsessel, Fahrzeugfederungen und vieles mehr funktionieren nach diesem Prinzip.

Jedem ist das Beispiel eingespannter elastischer Hölzer vom Lattenrost des eigenen Bettes vertraut. Hier wird auch deutlich, dass die Latten unbelastet durch die Einspannung vorgebogen sind. Bei Belastung und damit Aufwendung von Energie nehmen die Latten eine andere Form an, bei Entlastung kehren sie in ihren ursprünglichen Zustand zurück.

Mathematiker arbeiten daran, die Existenz von Gleichgewichtsfiguren solcher elastischer Flächen zu beweisen und diese dann auch mit Hilfe eines Computers zu berechnen. Letzteres macht unmittelbar Sinn, denn es spart viel Material und Geld, wenn man Experimente virtuell am Computer durchführen kann. Und damit diese Modelle und Berechnungen zuverlässige Vorhersagen gestatten, klärt der theoretisch arbeitende Mathematiker vorab Existenz und Eigenschaften von diesen Gleichgewichtszuständen.

Bild 1: Der Riffelsee in den Zermatter Bergen. Die Beantwortung der Frage, wo sich Seen bilden oder nicht, führt auf ein grundlegendes physikalisches Prinzip, aus der sich die hier beschriebene mathematische Strategie ableitet.



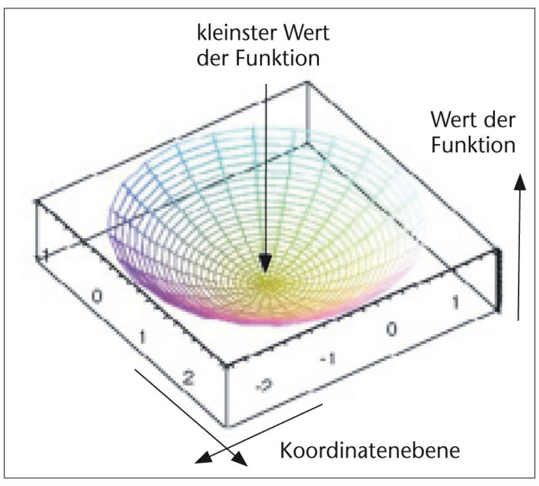


Bild 2 (oben): Im Wohnzimmerexperiment lassen sich die Erkenntnisse aus den Bergwanderungen leicht nachstellen: Wasser sammelt sich stets an der tiefsten Stelle. **Bild 3** (rechts): Ein mathematisches Modell gibt das Wesentliche dieses Experiments wieder. Dadurch werden physikalische Modelle Berechnungen zugänglich.

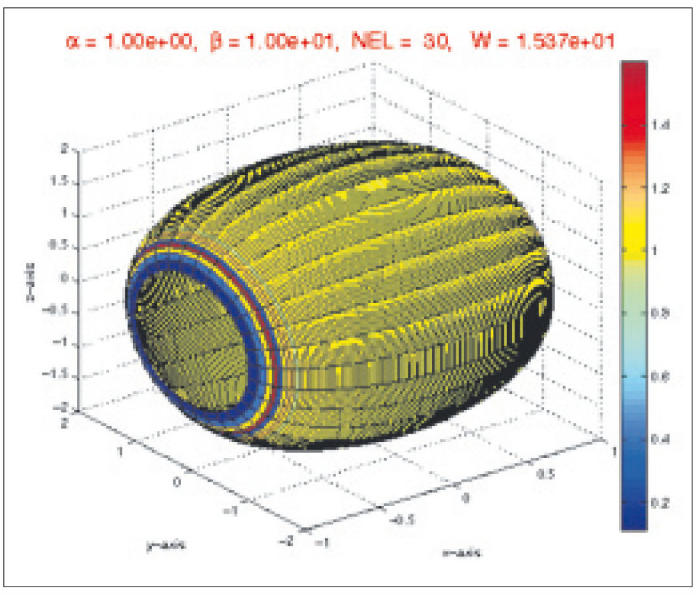


Bild 4: Der Computer visualisiert das mathematische Modell einer eingespannten elastischen Fläche. Computersimulation F. Schieweck

Höhen und Tiefen im Energiegebirge

Deren Gestalt liegt wie bei den eingespannten Latten im Lattenrost oder eingespannten Blattfedern meist keineswegs auf der Hand: man muss entweder ausprobieren, oder man kann mit Hilfe kluger Modelle theoretische Vorhersagen wagen. Dabei legt man, wie bei den Beobachtungen des Wassers, die Regel zu Grunde: Gleichgewichte eingespannter elastischer Platten stellen sich so ein, dass die Verformungsenergie unter allen zulässigen Verformungen denkbar klein wird.

Der Mathematiker, wieder das Bild vom Zermatter Riffelsee vor Augen, stellt sich die Situation bei elastischen Flächen so vor: Jeden Verformungszustand denkt man sich als Punkt in der Koordinatenebene und berechnet dazu die Verformungsenergie. Diese trägt man als Höhe über dem entsprechenden Punkt in der Ebene auf und so entsteht das Energiegebirge: „Gipfel" bedeuten, dass sehr viel Energie nötig ist, um große Verformungen zu erzeugen. Täler entsprechen Zuständen mit kleiner Energie, das heißt ziemlich kleinen Verformungen. Und den Gleichgewichtszustand des elastischen Körpers, also den Zustand mit kleinstmöglicher Energie findet man wie das Wasser die Senke.

Man startet irgendwo, mit dem willkürlichen Ausgangszustand eines Körpers, und überlegt sich, wie man Schritt für Schritt die Energie desselben verringert. Solange, bis es nicht mehr weiter geht und man im „Energiesee" angekommen ist. Hier ist die Energie des Körpers so klein wie möglich, man hat einen elastischen Gleichgewichtszustand gefunden.

Wasser findet das „Energietal" allein

Diese Strategie wird in der Theorie mit großem Erfolg verwendet. Und Simulationen mit Hilfe von Computern funktionieren genauso: Bild 4 zeigt das mit Hilfe eines Computers berechnete Gleichgewicht eines symmetrischen elastischen Körpers, der an seinen Rändern fest eingespannt wird.

Die benutzte Methode heißt Willmore-„Fluss". Mit dieser Bezeichnung knüpft man direkt an das Bild vom Riffelsee und dem dorthin strömenden Wasser an. Bilder vom Energiegebirge und dem darin verlaufenden Willmore-„Fluss" können die Mathematiker jedoch nur noch in ihren Köpfen entwickeln: Grafiken kann man nicht mehr erstellen – dazu wäre unendlich-dimensionales Papier erforderlich.

So einfach funktioniert Mathematik – jedenfalls, was die Grundideen betrifft. Das konkrete Beispiel der Untersuchung elastischer Flächen ist jedoch ein ganz aktueller Forschungsgegenstand und kann erst in Spezialfällen als gelöst betrachtet werden.

Es gibt eben doch einen wichtigen Unterschied zwischen dem Fließen von Wasser und dem Lösen mathematischer Probleme: Wasser findet das Tal allein, Mathematiker müssen mitunter aber sehr lange nachdenken, um den rechten Weg ins „Energietal" zu finden, ohne sich dabei versehentlich im Unendlichen zu verlaufen. Immerhin zeigt die Beziehung von Wasser-Fluss und Willmore-„Fluss": Mathematik ist die Kunst, Kompliziertes einfach – so einfach wie möglich – zu sehen.

Lesen Sie am 18. Oktober in dieser Reihe den Beitrag „Statistik – Wahrheit und Lüge" von Prof. Dr. Waltraud Kahle.

Wissenschaftsjahr 2008

Mathematik
Alles, was zählt

Veranstaltungen in Magdeburg

- **30. Oktober, 17 Uhr, Festung Mark: „Mathematik in Hollywood"**
Prof. Peter Deuflhard (FU Berlin) erklärt anhand von Ausschnitten aus Filmen wie „Titanic" und „Herr der Ringe" die enorme Rolle, die Mathematik heute bei der Herstellung von Filmen, spielt.

Filmfestival CineMath
(Moritzhof, 20 Uhr)

- **14. Oktober „Good Will Hunting"** (USA, 1997)
Regie: Gus Van Sant mit Matt Damon, Robin William, Ben Affleck. Der Film erzählt die wahre Geschichte der außergewöhnlichen mathematischen Begabung einer Putzkraft („Oscar" für das beste Drehbuch).
- **28. Oktober „CUBE"** (Kanada, 1997). Sieben Leute, erwachen inmitten eines aus Würfeln bestehenden Gebäudes. Sie müssen zusammenarbeiten, um herauszukommen.

www.ovgu.de/jdm2008

Was die Mathematik vom Wasser lernen kann – Mathematik ist die Kunst, das Komplizierte einfach zu sehen –

HANS-CHRISTOPH GRUNAU

Wasser ist belebend und anregend, in jeder Hinsicht. Millionen Menschen verbringen ihren Urlaub am Meer oder an Seen; darunter auch viele Freizeitangler, die oft Stunden scheinbar ohne jede Aktivität ververbringen. Immer beliebter werden Flusskreuzfahrten, während derer man über meist träge und ruhig dahin strömendes Wasser meditieren kann. Besonders attraktiv sind aber auch Wasserfälle wie z.B. der Rheinfall in Schaffhausen (Abbildung). Die Vielfalt von Beobachtungen im Zusammenhang mit strömendem Wasser hat stets auch die Wissenschaft stark beeinflusst. Gerade im Zusammenhang mit turbulenten Strömungen (Wasserfälle!) sind in Mathematik und Physik noch heute viele grundlegende Fragen ohne befriedigende Antwort. Für die Lösung einer besonders schwierigen und fundamentalen dieser Aufgaben ist sogar ein Preisgeld von einer Million US-Dollar ausgesetzt.

Herausforderung: Modellierung turbulenter Strömungen?

Aber auch Wasser, das in Ruhe ist oder sich bestenfalls in Zeitlupentempo bewegt, hat die Mathematik stark inspiriert, und darum soll es in diesem Beitrag gehen. Bei einer Wanderung in den Zermatter Bergen lädt der Riffelsee (Abbildung) zu einer Pause ein.

Mathematiker beginnen beim Anblick einer solchen Szenerie sofort nachzudenken: Warum sammelt sich das Wasser hier? Die Erklärung ist denkbar einfach: Hier ist eine Senke im Boden! Und wie kommt das Wasser dorthin? Ein Blick in die Bergwelt hilft weiter: Die Gletscher zeigen es im Zeitlupentempo (Abbildung). Wasser, auch im gefrorenen Zustand als Eis, wählt immer den direkten Weg bergab.

Wo bilden sich Seen, wo nicht?

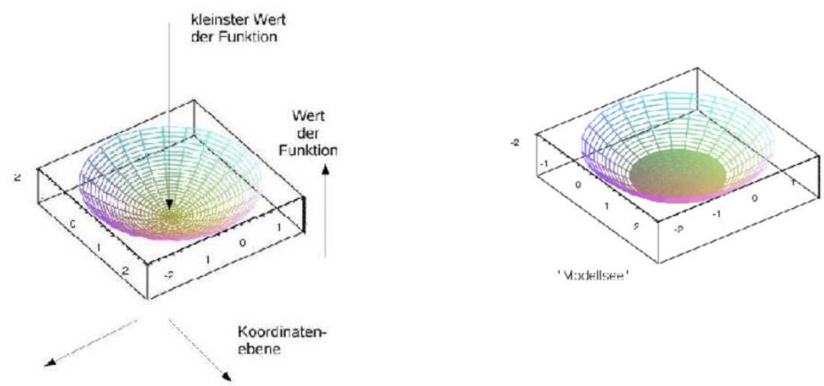
Wo fliesst das Wasser hin?

Von diesen Beobachtungen ausgehend soll eine Brücke geschlagen werden zu einem Teilgebiet der angewandten Mathematik, der sogenannten „Variationsrechnung“. Eine für diese Disziplin typische Fragestellung, an deren Beantwortung auch an der Otto-von-Guericke-Universität in Magdeburg gearbeitet wird, soll im Folgenden vorgestellt werden. Dabei soll erläutert werden, wie sich die Beobachtungen des bergwandernden Mathematikers in eine Lösungsstrategie umsetzen lassen.

Um das grundlegende Prinzip zu verstehen und zu formulieren, das für die Existenz des Riffelsees an genau der Stelle verantwortlich ist, besteht der erste Schritt darin, die Beobachtungen auf den wesentlichen Kern zu reduzieren und mit möglichst vielen weiteren Erfahrungen in Verbindung zu setzen. Jedermann ist durch alltägliche Erfahrung vertraut, was in einem einfachen Wohnzimmer-Experiment mit Hilfe einer vorübergehend umgewidmeten Obstschale nachgestellt wird: siehe Abbildung.

Wohnzimmerexperiment

Es steht fest: Wasser sammelt sich stets an der tiefsten Stelle! Und warum ist das so? Dadurch wird die Energie des Wassers soweit wie möglich minimiert. Es kostet Energie, Dinge gegen die Erdanziehungskraft „auf die Höhe“ zu bringen. Und möglichst viel von dieser Energie wird wieder frei, wenn das Wasser sich soweit wie möglich nach unten bewegt. Bevor dieses physikalische Prinzip an einem weniger einfachen Beispiel weiterverfolgt wird, soll es zunächst genauer durchdacht werden. Man erkennt, dass das Experiment mit der Schale durch einen Abstraktionsschritt mathematisch modelliert werden kann: Die Ähnlickeit der vom Computer mit Hilfe eines Mathematikprogramms erzeugten Abbildung mit dem Wohnzimmerexperiment (Abbildung) liegt auf der Hand.



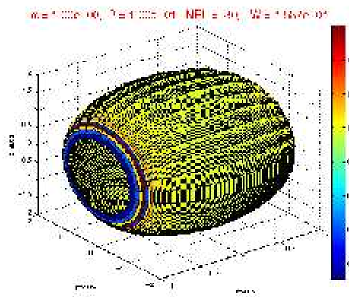
Mathematisches Modell

Das mathematische Modell beschreibt das Experiment sehr gut und hat den Vorteil, dass es nun Berechnungen – d.h. berechenbare Vorhersagen – ermöglicht. Die Position des „Wohnzimmersees“ lässt sich leicht voraussagen, indem man den kleinsten Wert der Funktion in Abbildung berechnet: Wo ist die Höhe in der Grafik über der waagerecht darunter liegenden „Koordinaten“-Ebene so klein wie möglich? Manch einer wird sich an das Thema „Kurvendiskussion“ im Schulunterricht erinnern.

Nun bedarf es nur noch eines weiteren Abstraktionsschrittes, um scheinbar ganz andere Fragen behandeln zukönnen. Viele Mathematiker beschäftigen sich gegenwärtig damit, Modelle für elastische Flächen zu untersuchen. Elastisches Material ist z.B. Metall oder geeignet bearbeitetes Holz. Um solche Flächen (Platten, Latten oder Bretter) zu verformen, muss man Energie aufwenden. Bei elastischem Material kann man diese Energie bei Entspannung, d.h. Rückkehr in den Ausgangszustand, zurückgewinnen. Spielzeuge wie Katapulte oder Trampoline, Sprungbretter, Schwingsessel, Fahrzeugfederungen und vieles mehr funktionieren nach diesem Prinzip. Jedem ist das Beispiel eingespannter elastischer Hölzer vom Lattenrost des eigenen Bettes vertraut. Hier wird auch deutlich, dass die Latten unbelastet, d.h. im Gleichgewichtszustand, durch die Einspannung vorgebogen sind. Bei Belastung und damit Aufwendung von Energie nehmen die Latten eine andere Form an, bei Entlastung kehren sie in ihren ursprünglichen Zustand zurück.

Mathematiker arbeiten daran, die Existenz von Gleichgewichtsfiguren solcher elastischer Flächen zu beweisen und diese dann auch mit Hilfe eines Computers zu berechnen. Letzteres macht unmittelbar Sinn, denn es spart viel Material und Geld, wenn man Experimente virtuell am Computer durchführen kann. Und damit diese Modelle und Berechnungen nicht auf Sand gebaut sind, sondern zuverlässige Berechnungen und Vorhersagen gestatten, klärt der theoretisch arbeitende Mathematiker vorab Existenz und Eigenschaften von diesen Gleichgewichtszuständen. Deren Gestalt liegt wie beispielsweise bei den eingespannten Latten im Lattenrost oder eingespannten Blattfedern meist keineswegs auf der Hand: man muss entweder ausprobieren oder man kann mit Hilfe kluger Modelle theoretische Vorhersagen wagen. Dabei legt man, so wie bei den Beobachtungen beim Wasser, die Regel zu Grunde: Gleichgewichte eingespannter elastischer Platten stellen sich so ein, dass die Verformungsenergie unter allen zulässigen Verformungen denkbar klein wird.

Und der Mathematiker, wieder das Bild vom Zermatter Riffelsee vor Augen, stellt sich die Situation bei elastischen Flächen so vor: Jeden Verformungszustand denkt man sich als Punkt in der Koordinatenebene und berechnet dazu die Verformungsenergie. Diese trägt man als Höhe über dem entsprechenden Punkt in der Ebene auf und so entsteht das Energiegebirge: „Gipfel“ bedeuten, dass sehr viel Energie nötig ist, um solche Zustände zu erzeugen, d.h. große Verformungen. Und Täler entsprechen Zuständen mit kleiner Energie, d.h. ziemlich kleinen Verformungen. Und den Gleichgewichtszustand des elastischen Körpers, d.h. den Zustand mit kleinstmöglicher Energie findet man wie das Wasser die Senke im Gebirge! Man startet irgendwo, d.h. mit einem willkürlichen Ausgangszustand eines Körpers, und überlegt sich, wie man Schritt für Schritt die Energie desselben verringert. Solange, bis es nicht mehr weiter geht und man im „Energiesee“ angekommen ist. Hier ist die Energie des Körpers kleinst möglich, man hat einen elastischen Gleichgewichtszustand gefunden! Diese Strategie wird in der Theorie mit großem Erfolg verwendet. Und Simulationen mit Hilfe von Computern funktionieren genauso: Die Abbildung zeigt das mit Hilfe eines Computers berechnete Gleichgewicht eines symmetrischen elastischen Körpers, der an seinen Rändern fest eingespannt wird.



Berechnete Lösung (Friedhelm Schieweck): Eingespannte elastische Fläche

Die benutzte Methode heißt Willmore-„Fluss". Mit dieser Bezeichnung knüpft man direkt an das Bild vom Riffelsee und dem dorthin strömenden Wasser an. Bilder vom Energiegebirge und dem darin verlaufenden Willmore-„Fluss" können die Mathematiker jedoch nur noch in ihren Köpfen entwickeln: Grafiken kann man nicht mehr erstellen! Dazu wäre „unendlich dimensionales" Papier erforderlich.

So einfach funktioniert Mathematik? Was die Grundideen betrifft: Ja! Die exakte Umsetzung bezogen auf konkrete Probleme ist aber mitunter sehr sehr schwierig. Die hier beschriebene Grundidee geht schon auf Gottfried Wilhelm Leibniz, Leonhard Euler und Joseph-Louis Lagrange zurück und ist damit 250–300 Jahre alt. Das mathematische Fundament zur Umsetzung dieser Idee konnte aber erst im 20. Jahrhundert gelegt werden; und in den letzten 50 Jahren sind viele solcher Minimierungsaufgaben gelöst worden. Das konkrete Beispiel der Untersuchung elastischer Flächen ist jedoch ein ganz aktueller Forschungsgegenstand und kann erst in Spezialfällen als gelöst betrachtet werden.

Es gibt eben doch einen wichtigen Unterschied zwischen dem Fließen von Wasser und dem Lösen mathematischer Probleme: Wasser findet das Tal von allein, Mathematiker müssen mitunter aber sehr lange nachdenken, um den rechten Weg ins „Energietal" zu finden. Und sie dürfen sich dabei nicht versehentlich im Unendlichen verlaufen.

Aber immerhin zeigt die Beziehung von Wasser-Fluss und Willmore-„Fluss“: Mathematik ist die Kunst, Kompliziertes einfach – so einfach wie möglich – zu sehen.

Copyright Foto: Karin Lange, Audiovisuelles Medienzentrum

Mit diesem Beitrag versuche ich zu erläutern, dass man in der Mathematik komplizierte und abstrakte Situationen besser verstehen kann, indem man Parallelen zu ganz einfachen und anschaulichen Erfahrungen des täglichen Lebens herstellt. Auch wenn diese Veranschaulichungen nur in mancher Hinsicht wirklich tragen, sind sie doch in der mathematischen Arbeit eine unverzichtbare Quelle für Ideen.

Hans-Christoph Grunau

Otto-von-Guericke Universität Magdbeurg, Fakultät für Mathematik, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg

Der mathematische Blick (Teil 9)

Statistik – Wahrheit und Lüge

Mathematik ist Überraschung, Abenteuer und Experiment. Professoren der Fakultät für Mathematik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg nehmen das „Jahr der Mathematik" zum Anlass, um dies in einer Beitragsreihe zu veranschaulichen. Im 9. Teil geht es heute um Statistiken und deren Risiken und Nebenwirkungen.

Von **Prof. Dr. Waltraud Kahle**

Wir werden jeden Tag mit Statistiken geradezu überschüttet. Viele von ihnen widersprechen unserem gesunden Menschenverstand – und diesem sollte man im Zweifelsfall auch glauben. Das Bonmot „Ich glaube nur den Statistiken, die ich selbst gefälscht habe" wird Winston Churchill zugeschrieben, obwohl es mit großer Wahrscheinlichkeit nicht von ihm stammt, zumal es im Englischen völlig unbekannt ist (vgl. Die Zeit, Wissen, 18/2002, zu finden unter www.zeit.de/stimmts).

In der Regel werden Statistiken nicht wissentlich gefälscht, vielmehr werden sie benutzt, um den eigenen Standpunkt zu untermauern. Daten lassen sich auf sehr verschiedene Art und Weise darstellen, und es ist nur zu menschlich, die Welt so zu sehen, wie wir sie gerne hätten. Das soll an einigen Beispielen erläutert werden.

Gefühlte und tatsächliche Teuerung

Haben Sie auch manchmal das Gefühl, dass die Einführung des Euro zu einem starken Preisanstieg geführt hat? Und dass im zurückliegenden Jahr die Lebensmittelpreise stark gestiegen sind? Dann geht es Ihnen nicht alleine so. Auf den Internetseiten des Statistischen Bundesamtes kann man die rechts abgebildete Grafik (1) finden. Aus der wird ersichtlich, dass gefühlte Inflation deutlich von der tatsächlichen Verbraucherpreisentwicklung abweicht. Woran liegt das?

Dazu muss man wissen, wie die Verbraucherpreisentwicklung berechnet wird. Zunächst wird ein sogenannter Warenkorb zusammengestellt. Der Warenkorb enthält diejenigen Produktvarianten, die für die Preisentwicklung relevant sind. Er wird laufend aktualisiert, damit immer diejenigen Produkte in die Preisbeobachtung eingehen, welche von den Konsumenten aktuell häufig gekauft werden.

Dann notieren rund 560 Preiserheber in 188 Gemeinden Monat für Monat die Preise der gleichen Produkte in denselben Geschäften. Zusätzlich erfolgt für viele Güterarten eine zentrale Preiserhebung im Internet. Insgesamt werden so monatlich rund 350 000 Einzelpreise erfasst. Die ausgewählten Produkte werden in knapp 700 Güterarten eingeteilt. Nun erfolgt eine Gewichtung der Güterarten nach dem Ausgabenanteil in der gesamten Bevölkerung. Da sich die Gebrauchsgewohnheiten ändern, wird auch diese Gewichtung von Zeit zu Zeit aktualisiert, in Deutschland alle fünf Jahre.

Somit kann folgendes passieren: Wenn ein Produkt teurer wird, wird es weniger gekauft. Damit sinkt der Anteil dieses Produktes im Warenkorb und die Teuerung ist nicht mehr spürbar. Desweiteren enthält der Warenkorb sowohl Lebensmittel als auch Anteile von hochwertigen Industriegütern wie zum Beispiel Autos. Er gilt für die durchschnittlichen Ausgaben aller privaten Haushalte in Deutschland. Besonders einkommensstarke oder einkommensschwache Haushalte können durchaus abweichende Ausgabenzusammensetzungen haben. Haushalte mit geringem Einkommen geben einen größeren Anteil ihres Geldes für Milch oder Obst aus und spüren daher die Teuerung bei Lebensmitteln stärker als einkommensstarke Haushalte.

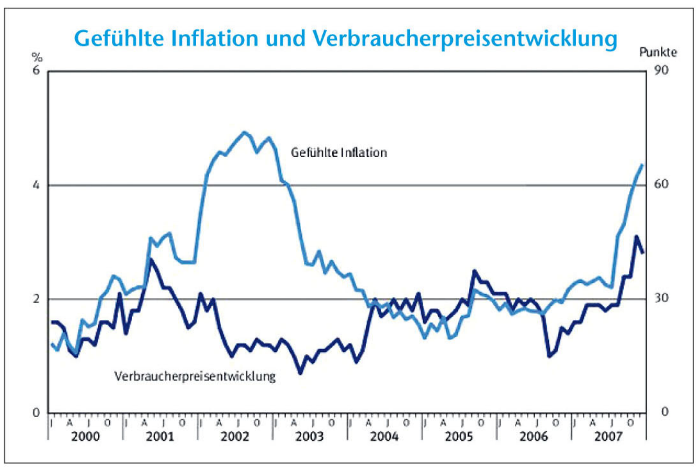
Das Wort „Prozent" ist nach dem Wort „Uhr" das in Deutschland am häufigsten gebrauchte Substantiv. Jedoch verschleiern Prozentangaben in Statistiken oft geschickt den jeweils mitgeteilten Sachverhalt. Was sagt es uns, wenn der Anteil weiblicher Abgeordneter um 100 Prozent gestiegen ist? Vielleicht sind jetzt statt einer zwei Frauen vertreten? Andererseits lassen sich riesige Zahlen klein reden, wenn man sie in Prozent einer noch größeren Zahl angibt: Die riesige Geldsumme von 2 Milliarden Euro sind nicht einmal 0,1 Prozent des Bruttoinlandproduktes.

Noch schlimmer wird es allerdings, wenn Prozentangaben verwendet werden, um eine zeitliche Entwicklung darzustellen. Sehr oft werden prozentuale Veränderungen im Vergleich zum vorigen Monat oder vorigen Jahr angegeben. Dabei kann es zu sehr kuriosen Effekten kommen. Ein einfaches Beispiel: Wenn ich zehn Euro Bargeld in der Tasche habe und zehn Euro dazubekomme, hat sich mein Bargeld um 100 Prozent erhöht. Gebe ich diese zehn Euro wieder zurück, verringert sich mein Bargeld nur um 50 Prozent. Das erweckt den Eindruck, als hätte ich immer noch mehr Geld als zu Beginn.

Gern werden Wachstumsraten angegeben. Diese Angaben sind vielfach sehr irreführend. Wenn sich das Wirtschaftswachstum verlangsamt, so heißt das lediglich, dass die Wirtschaft nicht mehr ganz so schnell wächst, aber sie wächst immer noch.

Auch Medien werden mitunter Opfer ihrer eigenen irreführenden Formulierungen. So kann man im Mai 2008 auf der Internetseite des „Tagesspiegels" unter der Überschrift „Verbraucherpreise leicht gesunken" lesen: „Gute und schlechte Nachrichten bei den Verbraucherpreisen: Pauschalreisen wurden billiger – teurer wurden Energie und vor allem Lebensmittel. Die Tatsache, dass die Inflation in Deutschland auf die niedrigste Rate seit acht Monaten gesunken ist, tröstet daher nur wenige." Auch wenn die Inflationsrate niedrig ist, bedeutet das trotzdem, das alles teurer wird, nur halt nicht mehr ganz so schnell.

Zur Ermittlung der Verbraucherpreise wird ein Warenkorb zusammengestellt, der zu dem hier gezeigten Wagen mit Waren des täglichen Bedarf auch längerfristige Ausgaben etwa für Heizung, Freizeit, Bildung, Gesundheit und Verkehr enthält. Diese Ausgaben werden Monat für Monat erfasst und verglichen. Foto: dpa



Grafik 1: Vergleich zwischen der tatsächlichen und der gefühlten Verbraucherpreisentwicklung. Vor allem nach der Euro-Einführung 2002 klafften die Werte stark auseinander. Quelle: Statistisches Bundesamt

Grafiken 2/3: Vergleich zwischen der DAX-Entwicklung binnen eines Jahres (Oktober 2007 bis September 2008) und im Zeitraum von drei Jahren (unten). Quelle: N24

Verführerische Kurven

Grafiken sind ein sehr einprägsames Mittel der Informationsvermittlung. Wir erfassen aus Grafiken auf einen Blick das Wesentliche. Allerdings schauen wir dabei häufig nicht genau genug hin.

Als Beispiel seien hier zwei Grafiken (2/3) zur DAX-Entwicklung von der Internetseite des Nachrichtensenders N24 am 1. Oktober angeführt. In der ersten sind die DAX-Kurse des zurückliegenden Jahres dargestellt: Wir gewinnen hier den Eindruck stark sinkender Kurse. Die folgende Grafik beinhaltet den Zeitraum von drei Jahren. Ohne die Finanzkrise klein reden zu wollen: Vermittelt dieses Bild nicht einen völlig anderen Eindruck?

Die beiden Zahlen (-24,69 und -0,43%) gehören übrigens zur Tagesentwicklung des 1. Oktober und haben in dieser Grafik absolut nichts zu suchen, genauso wenig wie der dicke rote Abwärtspfeil.

Nun berücksichtigen Sie noch, dass die vertikale Achse nicht bei 0 beginnt, sondern bei etwa 4600. Der DAX wird von der Deutschen Börse seit dem 1. Juli 1988 berechnet und startete bei 1163,52 Punkten. Die Indexbasis liegt bei 1000,00 Punkten per 31. Dezember 1987. Zum Zeitpunkt seiner Einführung wurde er exemplarisch bis 1959 zurückberechnet.

Stellen wir uns nun vor, die vertikale Achse würde im Jahr 1988 bei 1000 beginnen, dann sehen wir einen stetigen Aufwärtstrend mit einigen temporären Einbrüchen. Das soll nicht heißen, dass Aktien eine gute Geldanlage sind, sie sind und bleiben riskant. Aber die täglichen „Fieberkurven" des DAX, in denen der stündliche Kurs aufgeführt ist, können getrost überblättert werden.

Häufig entwickeln sich Ereignisse parallel. Dann besteht eine große Versuchung darin, auf den Eindruck eines Zusammenhang, also eine Kausalität, zu schließen. Das führt dann zu absurden Theorien. Zum Beispiel führt die zunehmende Industrialisierung sowohl zu einer Abnahme der Geburten als auch zu einer Abnahme der nistenden Storchenpaare. Somit lässt sich ohne weiteres „statistisch nachweisen", dass die Anzahl der Neugeburten von der Anzahl der Klapperstörche abhängt. Oder: In einer Studie wurde nachgewiesen, dass Männer mit weniger Kopfhaar mehr Geld verdienen. Ob nicht eher beides vom Alter abhängt?

An all diesen „statistischen Lügen" trägt nicht die Mathematik die Schuld. Die mathematische Statistik stellt Verfahren bereit, die eine korrekte Auswertung von Zahlenmaterial ermöglichen und die außerdem Aussagen zur Sicherheit der Ergebnisse liefern. Ich wünsche mir sehr oft sowohl von den Verfassern von Statistiken als auch von den Konsumenten etwas mehr von dem eingangs erwähnten gesunden Menschenverstand.

Vor allem sollten Sie als Leser der Flut von Statistiken skeptisch gegenüber stehen. Dazu bedarf es meistens nicht einmal tief greifender mathematischer Kenntnisse.

Lesen Sie am 15. November in dieser Reihe den Beitrag „Johann Philipp Gruson – ein fast vergessener Mathematiker aus Magdeburg" von Prof. (em) Dr. Karl Manteuffel.

Wissenschaftsjahr 2008
Mathematik
Alles, was zählt

Joachim Bublath in Magdeburg

❍ **21. Oktober, 19 Uhr, Campus, Hörsaal Gebäude 15: Dr. Joachim Bublath, Wissenschaftsjournalist: „Die Grenzen der Naturwissenschaften"**

Joachim Bublath studierte Theoretische Physik und war von 1981 bis 2008 Leiter der ZDF-Redaktion Naturwissenschaft und Technik. Er war Autor und Moderator der Sendereihen „Abenteuer Forschung" und der „Knoff Hoff Show" sowie der ZDF-Reihen „Faszination Erde" und „Geheimnisse unseres Universums". Joachim Bublath ist Lehrbeauftragter an der Hochschule für Fernsehen und Film München.

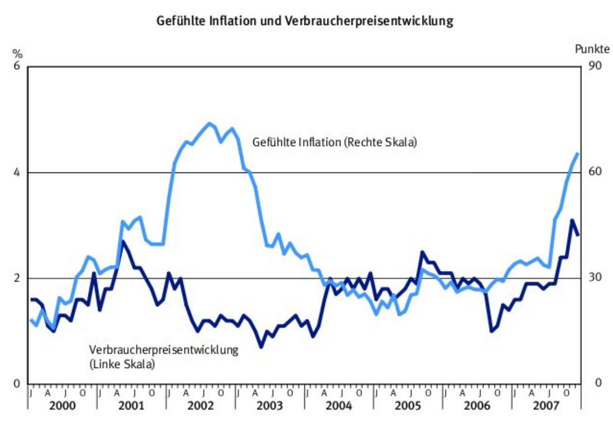
www.ovgu.de/jdm2008

Statistik: Wahrheit und Lüge

WALTRAUD KAHLE

Wir werden jeden Tag von den Medien mit Statistiken geradezu überschüttet. Viele von ihnen wiedersprechen unserem gesunden Menschenverstand - und diesem sollte man im Zweifelsfall auch glauben. Das Bonmot „Ich glaube nur den Statistiken, die ich selbst gefälscht habe“ wird Winston Churchill zugeschrieben, obwohl es mit großer Wahrscheinlichkeit nicht von ihm stammt (vergleiche *Die Zeit, Wissen, 18/2002*, zu finden unter `www.zeit.de/stimmts`). In der Regel werden Statistiken nicht wissentlich gefälscht, vielmehr werden sie benutzt, um den eigenen Standpunkt zu untermauern. Daten lassen sich auf sehr verschiedene Art und Weise darstellen, und es ist nur zu menschlich, die Welt so zu sehen, wie wir sie gerne hätten. Das soll an einigen Beispielen erläutert werden.

Gefühlte oder statistische Teuerung: Haben Sie auch manchmal das Gefühl, daß die Einfürung des Euro zu einem starken Preisanstieg geführt hat? Und daß im letzten Jahr die Lebensmittelpreise stark gestiegen sind? Dann geht es Ihnen nicht alleine so. Auf den Internetseiten des Statistischen Bundesamtes kann man die folgende Grafik finden:

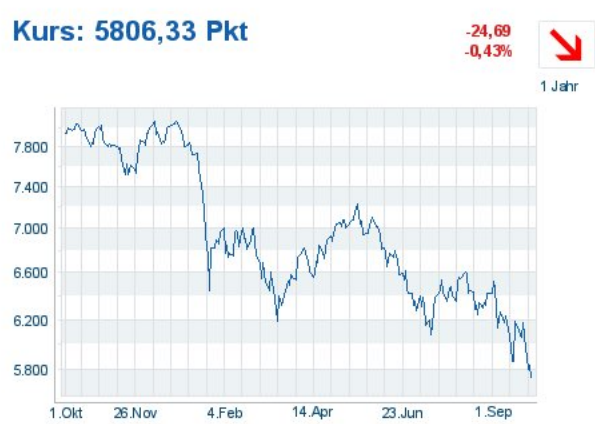


Woran liegt es, daß die gefühlte Inflation so weit von der Verbraucherpreisentwicklung abweicht? Dazu muß man zunächst wissen, wie die Verbraucherpreisentwicklung berechnet wird. Dazu wird ein so genannter Warenkorb zusammengestellt. Der Warenkorb enthält diejenigen Produktvarianten, die für die Konsumwelt relevant sind. Er wird laufend aktualisiert, damit immer diejenigen Produkte in die Preisbeobachtung eingehen, welche von den Konsumenten aktuell häufig gekauft werden. Dann notieren rund 560 Preiserheber in 188 Gemeinden Monat für Monat die Preise der gleichen Produkte in denselben Geschäften. Zusätzlich erfolgt für viele Güterarten eine zentrale Preiserhebung im Internet. Insgesamt werden so monatlich rund 350 000 Einzelpreise erfasst. Ein einmal für die Preisbeobachtung ausgewählter Artikel wird dann gegen einen anderen ausgetauscht, wenn er nicht mehr oder nur noch wenig verkauft wird. Die ausgewählten Produkte werden in knapp 700 Güterarten eingeteilt. Nun erfolgt eine Gewichtung der Güterarten nach dem Ausgabenanteil in der gesamten Bevölkerung. Da sich die Gebrauchsgewohnheiten ändern, wird auch diese Gewichtung von Zeit zu Zeit aktualisiert, bei uns alle 5 Jahre. Somit kann folgendes passieren: Wenn ein Produkt teurer wird, wird es weniger gekauft. Damit sinkt der Anteil dieses Produktes im Warenkorb und die Teuerung ist nicht mehr spürbar. Desweitern enthält der Warenkorb sowohl Lebensmittel als auch Anteile von hochwertigen Industriegütern wie z.B. Autos. Er gilt für die durchschnittlichen Ausgaben aller privaten Haushalte in Deutschland. Besonders einkommensstarke oder einkommensschwache Haushalte können durchaus abweichende Ausgabenzusammensetzungen haben. Haushalte mit geringem Einkommen geben einen größeren Anteil ihres Geldes für Milch oder Obst aus und spüren daher die Teuerung bei Lebensmitteln stärker als einkommensstarke Haushalte.

Prozente und Wachstumsraten: Das Wort „Prozent“ ist nach dem Wort „Uhr“ das in Deutschland am häufigsten gebrauchte Substantiv. Jedoch verschleiern Prozentangaben in Statistiken oft geschickt den jeweils mitgeteilten Sachverhalt. Was sagt es uns, wenn der Anteil weiblicher Abgeordneter um 100 Prozent gestiegenen ist? Vielleicht sind jetzt statt einer zwei Frauen vertreten? Andererseits lassen sich riesige Zahlen klein reden, wenn man sie in Prozent einer noch größeren Zahl angibt: Die riesige Geldsumme von 2 Milliarden Euro sind nicht einmal 0,1 Prozent des Bruttoinlandproduktes. Noch schlimmer wird es allerdings, wenn Prozentangaben verwendet werden, um eine zeitliche Entwicklung darzustellen. Sehr oft werden prozentuale Veränderungen im Vergleich zum vorigem Monat oder vorigem Jahr angegeben. Dabei kann es zu sehr kuriosen Effekten kommen. Ein einfaches Beispiel: Wenn ich 10 Euro Bargeld in der Tasche habe und 10 Euro dazubekomme, hat sich mein Bargeld um 100 Prozent erhöht. Gebe ich diese 10 Euro wieder zurück, verringert sich mein Bargeld nur um 50 Prozent. Das erweckt den Eindruck, als hätte ich immer noch mehr Geld als zu Beginn!

Gern werden Wachstumsraten angegeben. Diese Angaben sind vielfach sehr irreführend. Wenn sich das Wirtschaftswachstum verlangsamt, so heißt das lediglich, daß die Wirtschaft nicht mehr ganz so schnell wächst, aber sie wächst immer noch. Auch Nachrichtensender unterliegen mitunter ihren eigenen irreführenden Formulierungen: So kann man im Mai 2008 auf der Internetseite des Tagesspiegels unter der Überschrift *Verbraucherpreise leicht gesunken* lesen: „Gute und schlechte Nachrichten bei den Verbraucherpreisen: Pauschalreisen wurden billiger - teurer wurde Energie und vor allem Lebensmittel. Die Tatsache, dass die Inflation in Deutschland auf die niedrigste Rate seit acht Monaten gesunken ist, tröstet daher nur wenige.“ Wenn die Inflationsrate jedoch niedrig ist, bedeutet das trotzdem, das alles teurer wird, nur halt nicht mehr ganz so schnell!

Grafische Darstellungen: Grafiken sind ein sehr einprägsames Mittel der Informationsvermittlung. Wir erfassen aus grafiken auf einen Blick das Wesentliche. Allerdings schauen wir dabei häufig nicht genau genug hin. Als Beispiel seien hier zwei Grafiken, die Entwicklung des DAX betreffend, von der Internetseite des Nachrichtensenders N24 am 1. Oktober angeführt. In der ersten sind die DAX-Kurse des letzen Jahres dargestellt:



Wir gewinnen hier den Eindruck stark sinkender Kurse. Die folgende Grafik beinhaltet den Zeitraum von drei Jahren:

Ohne die Finanzkriese kleinreden zu wollen: Vermittelt dieses Bild nicht einen völlig anderen Eindruck? Die beiden Zahlen (-24,69 und -0,43%) gehören übrigens zur Tagesentwicklung des 1. Oktober und haben in dieser Grafik absolut nichts zu suchen, genauso wie der dicke rote Abwärtspfeil. Nun berücksichtigen Sie noch, daß die vertikale Axe nicht bei 0 beginnt, sondern bei ca. 4600. Der DAX wird von der Deutschen Börse seit dem 1. Juli 1988 berechnet und startete bei 1.163,52 Punkten. Die Indexbasis liegt bei 1.000,00 Punkten per 31. Dezember 1987. Zum Zeitpunkt seiner Einführung wurde er exemplarisch bis 1959 zurückberechnet. Stellen wir uns nun vor, die vertikale Axe würde im Jahr 1988 bei 1000 beginnen, dann sehen Sie einen stetigen Aufwärtstrend mit einigen temporären Einbrüchen. Das soll nicht heißen, daß Aktien eine gute Geldanlage sind, sie sind und bleiben riskannt. Aber die täglichen „Fieberkurven“ des DAX, in denen der stündliche Kurs aufgeführt ist, können getrost überblättert werden.

Kausalitäten: Häufig entwickeln sich Ereignisse parallel. Dann besteht eine große Versuchung darin, auf deren ursächlichen Zusammenhang, also eine Kausalität, zu schließen. Das führt dann zu absurden Theorien. Zum Beispiel führt die zunehmende Industrialisierung sowohl zu einer Abnahme der Geburten als auch zu einer Abnahme der nistenden Storchpaare. Somit laßt sich ohne weiteres „statistisch nachweisen“, daß die Anzahl der Neugeburten von der Anzahl der Klapperstörche abhängt! In einer Studie wurde nachgewiesen, daß Männer mit weniger Kopfhaar mehr Geld verdienen. Ob nicht eher beides vom Alter abhängt?

An all diesen „statistischen Lügen“ trägt nicht die Mathematik die Schuld. Die mathematische Statistik stellt Verfahren bereit, die eine korrekte Auswertung von Zahlenmaterial ermöglichen und die außerdem Aussagen zur Sicherheit der Ergebnisse liefern. Ich wünsche mir sehr oft sowohl von den Verfassern von Statistiken als auch von den Konsumenten etwas mehr von dem eingangs erwähnten gesunden Menschenverstand. Vor allem sollten Sie als Leser der Flut von Statistiken skeptisch gegenüber stehen. Dazu bedarf es meistens nicht einmal tiefgreifender mathematischer Kentnisse.

An der Mathematik hat mich immer ihre Universalität fasziniert: Diffusionsprozesse werden nicht nur in der Physik, sondern auch zur Beschreibung von Verschleißerscheinungen und zur Modellierung von Aktienkursen benutzt.

Waltraud Kahle

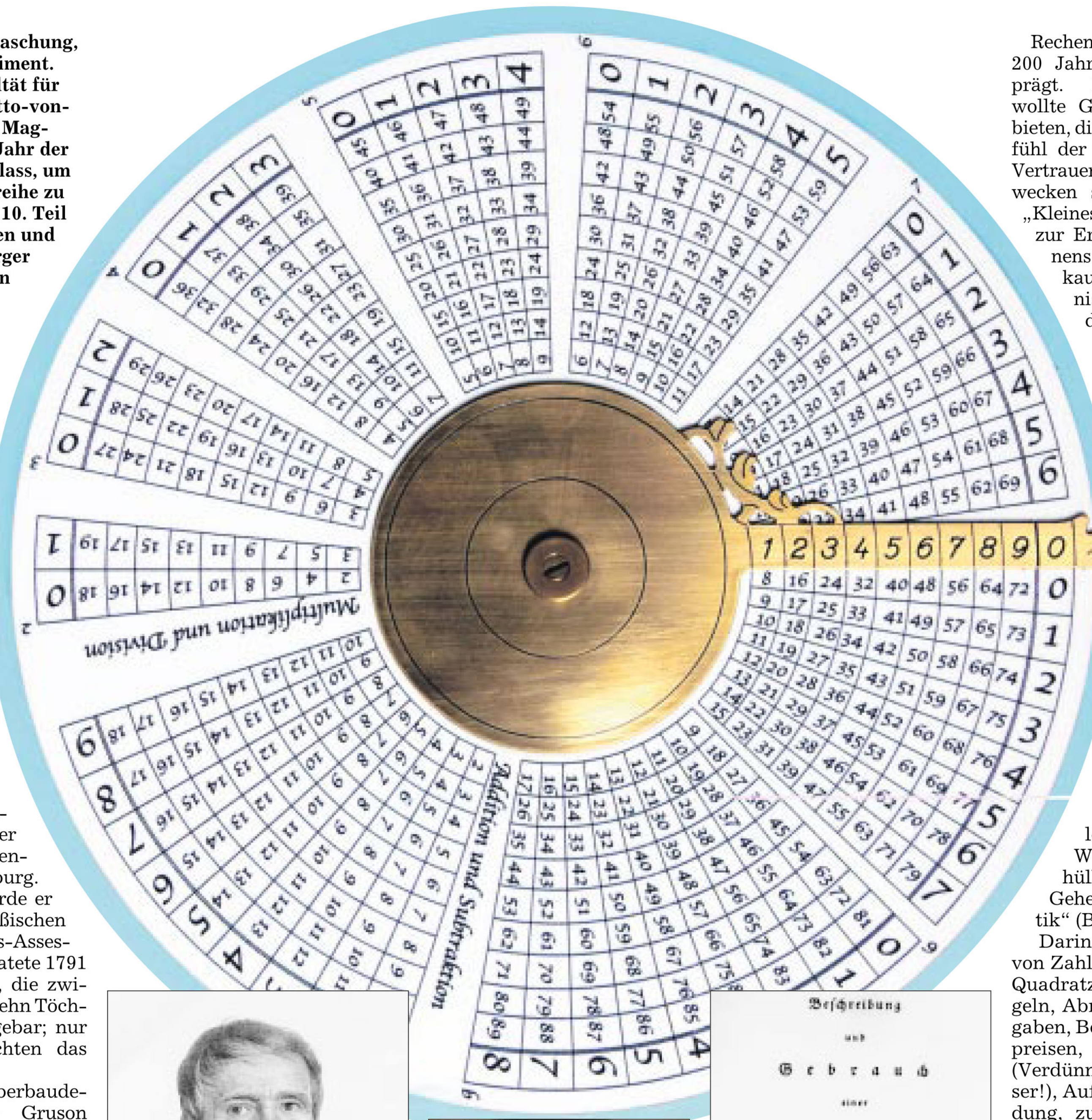
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg
E-mail address: waltraud.kahle@ovgu.de

Der mathematische Blick (Teil 10)

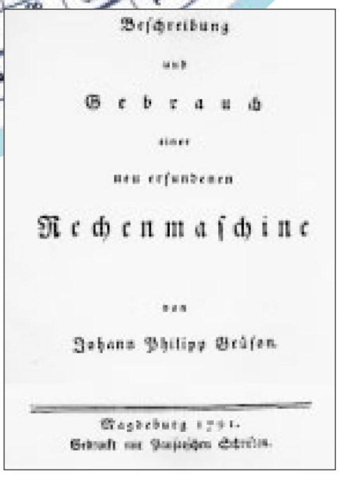
Johann Philipp Gruson – Magdeburgs fast vergessener Mathematiker

Mathematik ist Überraschung, Abenteuer und Experiment. Professoren der Fakultät für Mathematik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg nehmen das „Jahr der Mathematik“ zum Anlass, um dies in einer Beitragsreihe zu veranschaulichen. Im 10. Teil geht es heute um Leben und Wirken des Magdeburger Mathematikers Johann Philipp Gruson.

Von Prof. (em.) Dr. **Karl Manteuffel**



Johann Philipp Gruson (1768 bis 1857) als junger Mann in Magdeburg (rechts) und in einer Lithografie von E. Lieder vermutlich um 1830.



Beschreibung
und
Gebrauch
einer
neu erfundenen
Rechenmaschine
von
Johann Philipp Grüson.

Magdeburg 1791.
Gedruckt mit [illegible] Schriften.

Die in Magdeburg nachgebaute Mechanische Rechenscheibe von Gruson mit einem „Weiser“ für die Multiplikation mit der 8; unterhalb des „Weisers“ sind die Vielfachen von 8 (16, 24, 32,...) ablesbar. Eine Beschreibung zum Gebrauch der Rechenmaschine veröffentlichte Gruson 1791 in Magdeburg. Fotos/Repros: Prof. K. Manteuffel

Am 2. Februar 1768 wurde Johann Philipp Gruson als sechstes von 14 Kindern des Brauhaus- und Gasthausbesitzers Abraham Gruson (1737–1811) in Neustadt bei Magdeburg geboren.

Über seine Schul- und Ausbildungszeit lassen sich keine genauen Angaben machen. Sicher ist: Mit 19 Jahren erhielt er eine Anstellung als „Bau-Conducteur“ an der Kriegs- und Domänenkammer in Magdeburg. Nach vier Jahren wurde er zum „königlich-preußischen Oberbaudepartements-Assessor“ ernannt und heiratete 1791 Marie Judith Bailleu, die zwischen 1792 und 1811 zehn Töchter und drei Söhne gebar; nur sechs Töchter erreichten das Erwachsenenalter.

Das königliche Oberbaudepartement versetzte Gruson 1794 als Professor der Mathematik an das königlich-preußische Cadettenkorps nach Berlin. Diese Versetzung verdankte er vermutlich verschiedenen Veröffentlichungen: Tabellen zum Rechnen im Duodezimalmaß (1797), Anwendungen der Analysis auf ökonomische Aufgaben in der Landwirtschaft (1789), Erfindung einer Rechenmaschine (1790), Verbesserung der Neperschen Rechenstäbe (1792) und eine bei der Akademie eingereichten Arbeit zu Problemen der Euklidischen Geometrie (1792). Weitere Publikationen folgten, darunter eine Sammlung gelöster algebraischer Aufgaben nebst einer Einleitung in die Algebra (2 Teile, 1793 und 1795), Beiträge zur Felderteilung (1795), eine Sammlung allgemeiner nützlicher Rechentafeln für jedermann zum Multiplizieren und Dividieren nebst einer Tafel aller einfachen Faktoren von 1 bis 10 500 (1788 und 1798). Seine Untersuchungen zu agrarökonomischen Problemen sollen unter anderem auf dem Gut Pietzpuhl bei Burg auch praktisch angewendet worden sein.

43 Lehrbücher und zehn Tabellenwerke

Im Jahre 1798 wurde Johann Philipp Gruson ordentliches Mitglied des „Academy Royale des Sciences et Belles Lettres á Berlin“ und war viele Jahre Sprecher der physikalisch-mathematischen Klasse. 1837 wurde er als „Veteran der Akademie“ geehrt. Bis zu seinem Tode 1857 gehörte er fast 60 Jahre der Akademie an.

Von 1799 bis 1831 lehrte Gruson auch an der Bauakademie. Ab 1811 hielt er Vorlesungen an der 1810 gegründeten Berliner Universität. Deren philosophische Fakultät verlieh ihm 1816 „unter Verzicht auf die statuarischen Leistungen“ die philosophische Doktorwürde und berief ihn zum Extra-Ordinarius; als solcher hielt er bis 1850, also bis zu seinem 83. Lebensjahr Vorlesungen, Übungen und sogenannte Privatissima. Von 1817 bis 1834 hatte Gruson auch die Stellung eines Professors der Mathematik am Königlich-Französischen Gymnasium inne. Im Jahre 1827 war seine Emeritierung als Professor am Kadettencorps erfolgt.

Das Spektrum seiner Lehrgebiete war groß: Dreiecksgeometrie, Arithmetik, Algebra, Zahlentheorie, Elementargeometrie, Geodäsie, Stereometrie, Kegelschnitte, analytische Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie, geometrische und ökonomische Felderteilung, politische Arithmetik, Elemente der Differential- und Integralrechnung, Analysis endlicher Größen, Statik, Hydrostatik, Aerostatik, Dynamik, Hydrodynamik, um nur einige zu nennen. Das Auffallende waren vielfältige Beispiele und Anwendungen, eine wohldurchdachte Gliederung und eine verständliche Darbietung.

Gruson verfasste 43 Lehrbücher und zehn Tabellenwerke. Mit seinen Lehrbüchern, von denen manche in mehreren Auflagen und zum Teil auch in französischer Sprache erschienen, wandte er sich in erster Linie an die von ihm auszubildenden Angehörigen des Kadettencorps, an Schüler, an Ingenieur- und Lehrerstudenten. Inhaltlich umfassten sie zum größten Teil Einführungen in Teilgebiete der Mathematik.

Konstruktionen nur mit dem Zirkel

Die Bücher trugen teils sehr ausführliche Titel, die Wesentliches über den Inhalt und deren Nutzer ausdrücken sollten. Bei Titeln wie „Systematischer Leitfaden der reinen Mathematik, enthaltend Arithmetik, ebene Geometrie, Buchstabenrechnung, Algebra, Analytische Geometrie, gewöhnliche und analytische ebene Trigonometrie, Polygonometrie und Kegelschnitte. Zum Gebrauch für Schulen, Berlin 1828“ wusste jeder Interessent, woran er war.

Er übersetzte auch sieben Bücher aus dem Französischen, die für Fortschritte in verschiedenen Teilgebieten der Mathematik eine bedeutsame Rolle spielten. Das Werk „La geometria del compasso“ (Geometrie des Zirkels) von L. Mascheroni aus dem Jahr 1797 erschien 1798 in Französisch. Grusons Übersetzung wurde durch eine Theorie des Proportionalzirkels und eine Sammlung von über 400 Übungsaufgaben ergänzt und erschien 1825 unter dem Titel „Gebrauch des Zirkels“. Inhalt dieses Buches ist der Nachweis, dass alle mit Zirkel und Lineal lösbaren Konstruktionsaufgaben auch allein mit dem Zirkel gelöst werden können.

Rechenfertigkeiten waren vor 200 Jahren nicht sehr ausgeprägt. Mit Tabellenwerken wollte Gruson Hilfsmittel anbieten, die dem Benutzer ein Gefühl der Sicherheit geben und Vertrauen in die Mathematik wecken sollten; zum Beispiel: „Kleines Hand- und Hilfsbuch zur Ersparung des Ausrechnens bei dem Ein- und Verkauf nützlicher Bedürfnisse nach dem neuen, dem königlichen Edikt vom 13. Dezember 1811 in Umlauf zu setzende Münzsorte, den Thaler zu 30 Silbergroschen und den Groschen zu 10 Pfennigen“ aus dem Jahr 1812.

Zwei Bücher von J. P. Gruson lassen sich nirgends einordnen. Er war sehr bemüht, Anwendungen der Mathematik bekannt zu machen und wollte zeigen, dass mathematische Kenntnisse und mathematisches Wissen im Alltag hilfreich und nützlich sind. Er legte ein zweibändiges Werk vor über „Enthüllte Zaubereyen und Geheimnisse der Arithmetik“ (Berlin 1797 und 1800). Darin finden sich Zerlegung von Zahlen, Eigenschaften von Quadratzahlen, Teilbarkeitsregeln, Abmess- und Umfüllaufgaben, Berechnung von Einzelpreisen, Mischungsaufgaben (Verdünnen von Wein mit Wasser!), Aufgaben zur Kapitalbildung, zur Entschuldung und viele andere Beispiele, die bildend und nützlich unterhaltend zugleich sind. Gruson verstand es, anwendbare Mathematik interessant, unterhaltend und einprägsam vorzustellen.

Eine Rechenmaschine ohne Räderwerk

Am 2. Februar 1790, seinem 22. Geburtstag, stellte Gruson eine Rechenmaschine vor, der selbst Kritiker Beifall zollten. Denn: „Je einfacher eine Maschine ist, je weniger Räder sie hat, desto besser. In dieser Rücksicht macht die Grusonsche Rechenmaschine gewiss allen ihren Schwestern den Rang streitig. Sie ist eine einfache Scheibe, und leistet dennoch zum mechanischen Rechnen die Dienste einer zusammengesetzten Maschine“, hieß es in einer zeitgenössischen Beschreibung. Die letzte Bemerkung bedeutete, dass die Ausführung aller vier Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) möglich ist. Allerdings wurde nicht darauf hingewiesen, dass die Handhabung der Rechenscheibe sehr umständlich ist.

Jedenfalls wurden diese Scheiben vom Durchmesser von 0,7 rheinischen Fuß (etwa 22 cm) ab November 1790 für den stolzen Preis von „1 Thaler und 2 Groschen“ und mit der Aufschrift „Rechenmaschine, erfunden von Johann Philipp Gruson, Magdeburg, 2. Februar 1790“ in Magdeburg verkauft. Ein Originalexemplar konnte bisher nicht gefunden werden. Verschiedene jeweils unvollständige oder ungenaue Beschreibungen erschweren den Nachbau, der in diesem Jahr endlich gelungen zu sein scheint (Bild oben).

Johann Philipp Gruson starb wenige Monate vor Vollendung seines 90. Lebensjahres am 16. November 1857 in Berlin. Kurz vor seinem Tod sagte er: „Tous mes jours étaient des jours de fête“ – (in freier Übersetzung:) „Ich habe gelebt“. Durch seine Tabellenwerke, mit seiner Rechenscheibe und durch seine anwendungsorientierte Publikations- und Lehrtätigkeit erwarb er sich den Ruf eines erfolgreichen Streiters für Anwendungen der Mathematik „im gemeinen Leben“.

Lesen Sie am 13. Dezember in dieser Reihe „Lotto – auf einmal bist Du reich?“ von Prof. Dr. Gerd Christoph.

Veranstaltungen zum Jahr der Mathematik in Magdeburg

- **18. November,** 19 Uhr, Moritzhof: **Visual Math – Videowettbewerb zum „Jahr der Mathematik“.** Die Studierenden des Studiengangs Medienbildung, visuelle Kultur und Kommunikation der Universität stellen ihre Beiträge im Wettbewerb VisualMath zu den Themen „Mathematik im Alltag“ und „Mathematische Probleme visualiert“ vor.
- **20. November,** 19 Uhr Neuapostolische Kirche Moritzplatz: **Mathematik und Musik,** Prof. Dr. Herbert Henning und Prof. Dr. Friedrich Juhnke (Orgel) mit Werken von Johann Sebastian Bach
- **27. November,** 17 Uhr Festung Mark: **Faszination Mathematik!** Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher (MATHEMATIKUM Giessen) unternimmt eine wissenschaftlich-unterhaltsame Zeitreise durch mehr als 3000 Jahre Mathematik und ihre Entdeckungen.
- **11.Dezember,** 17 Uhr Festung Mark: **Würfel, Sphären, Proportionen – klingende Mathematik** Gesprächs-Konzert mit Prof. Violeta Dinescu und dem Philharmonisches Streichquartett Magdeburg, Undine Dreißig (Mezzo), Prof. Dr. Herbert Henning.

www.ovgu.de/jdm2008

Johann Philipp Gruson
Magdeburgs vergessener Mathematiker

KARL MANTEUFFEL

Am 2. Februar 1768 wurde dem Brauhaus- und Gasthausbesitzer Abraham Gruson (1731 - 1812) in Neustadt bei Magdeburg als 6. Kind ein Sohn geboren, der auf den Namen Jean Philippe getauft wurde.

Gruson als junger Mann

Von den insgesamt 14 Kindern der Familie starben 10 im Kindesalter und ein Sohn im Alter von 25 Jahren; es überlebten nur die 1770 geborene Tochter Marie-Catherine und der 1780 geborene Sohn Jean David. Die Familie gehörte zur Pfälzer Kolonie und damit zu den Nachkommen der 491 sich zum Calvinismus bekennenden Familien, die 1689 auf Grund der Konvention zu Gröningen vom 25.05.1689 in Magdeburg, in Neustadt bei Magdeburg und in Sudenburg angesiedelt wurden. Die Pfälzer Kolonie bildete die dritte evangelisch-reformierte Gemeinde in Magdeburg und grenzte sich konsequent gegen die Refugies (die 1686 direkt aus Frankreich eingewanderten Hugenotten) und gegen die deutsch-reformierte Magdeburger Hofgemeinde ab.

Von Magdeburg nach Berlin

Über die Schul- und Ausbildungszeit von J. P. Gruson lassen sich keine genauen Angaben machen. Mit 19 Jahren - also 1787 - erhielt er eine Anstellung als ,,Bau-Conducteur" an der Kriegs- und Domänenkammer in Magdeburg. Nach vier Jahren wurde er zum ,,königlich-preußischen Oberbaudepartements-Assessor" ernannt und heiratete 1791 Marie Judith Bailleu. Zwischen 1792 und 1811 wurden 13 Kinder geboren, 10 Töchter und 3 Söhne; nur 6 Töchter erreichten das Erwachsenenalter. Das königliche Oberbaudepartement versetzte Gruson

1794 als Professor der Mathematik an das königlich-preußische Cadettenkorps nach Berlin. Diese Versetzung verdankte er vermutlich verschiedenen Veröffentlichungen: ,,Tabellen zum Rechnen im Duodezimalmaß" (1791), ,,Anwendungen der Analysis auf ökonomischen Aufgaben in der Landwirtschaft" (1789), ,,Erfindung einer Rechenmaschine" (1790), ,,Verbesserung der Neperschen Rechenstäbe" (1792), einer bei der Akademie eingereichten Arbeit zu Problemen der Euklidischen Geometrie (1792) u. a. Weitere Publikationen wie eine ,,Sammlung gelöster algebraischer Aufgaben nebst einer Einleitung in die Algebra" (2 Teile, 1793 und 1795), ,,Supplement zu L. Eulers vollständiger Anleitung zur Differential- und Integralrechnung" (1795 und 1798), ,,Beiträge zur Felderteilung" (1795), ,,Pinakothek oder Sammlung allgemeiner nützlicher Rechentafeln für jedermann zum Multiplizieren und Dividieren, erfunden 1788, nebst einer Tafel aller einfachen Faktoren von 1 bis 10500" (1788 bzw. 1798) u. a. folgten und ließen deutlich sein Bemühen um die Verbesserung der Rechenfertigkeiten und der Anwendungen erkennen. U. a. sollen seine Untersuchungen zu agrarökonomischen Problemen auf dem Gut Pietzpuhl auch praktisch angewendet worden sein. Im Jahre 1798 wurde er ordentliches Mitglied des ,,Academie Royale des Sciences et Belles Lettres a Berlin" und war viele Jahre Sprecher der physikalisch-mathematischen Klasse. 1837 wurde er als ,,Veteran der Akademie" geehrt. Bis zu seinem Tode 1857 gehörte er fast 60 Jahre der Akademie an.

Gruson ca. um 1830

Zum Dr. phil. und Extraordinarius

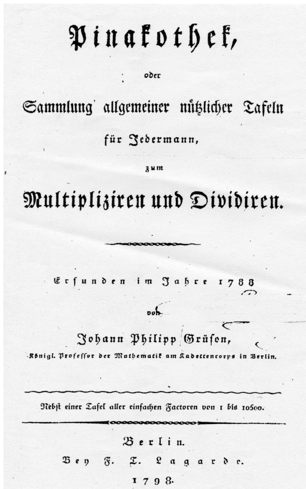
Von 1799 an lehrte Gruson auch an der Bauakademie. Ab 1811 hielt er - als lesendes Akademiemitglied - Vorlesungen an der 1810 gegründeten Berliner Universität. Deren philosophische Fakultät verlieh ihm 1816 ,,unter Verzicht auf die statuarischen Leistungen" die philosophische Doktorwürde und berief ihn zum Extra-Ordinarius; als solcher hielt er bis 1850, d. h. bis zu seinem 83. Lebensjahr Vorlesungen, Übungen und sog. Privatissima. Von 1817 bis 1834 hatte Gruson auch die Stellung eines Professors der Mathematik am Königlich-Französischen Gymnasium inne. Im Jahre 1827 war seine Emeritierung als Professor am Cadettencorps erfolgt.

Das Spektrum seiner Lehrgebiete war groß: Dreiecksgeometrie, Arithmetik, Algebra, Zahlentheorie, Elementargeometrie, Geodäsie, Stereometrie, Kegelschnitte, Analytische Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie, geometrische und ökonomische Felderteilung, politische Arithmetik, Elemente der Differential- und Integralrechnung, Analysis endlicher Größen, Statik, Hydrostatik, Aerostatik, Dynamik, Hydrodynamik, um nur einige zu nennen. Das Auffallende waren vielfältige Beispiele und Anwendungen, eine wohldurchdachte Gliederung und eine verständliche Darbietung.

Bücher für Cadetten, Schüler und Studenten

Gruson verfasste 43 Lehrbücher und 10 Tabellenwerke. Mit seinen Lehrbüchern, von denen manche in mehreren Auflagen und zum Teil auch in französischer Sprache erschienen, wandte er sich in erster Linie an die von ihm auszubildenden Angehörigen des Cadettencorps, an Schüler, an Ingenieur- und Lehrerstudenten. Inhaltlich umfassten sie zum größten Teil Einführungen in Teilgebiete der Mathematik. Die Bücher trugen i. a. sehr ausführliche Titel, die Wesentliches über den Inhalt ausdrücken sollten sowie über die Nutzer. Zwei Beispiele mögen das belegen: ,,Leitfaden des ersten arithmetischen Unterrichtes für alle königlich-preußischen adligen Cadettencorps", Berlin 1797; ,,Systematischer Leitfaden der reinen Mathematik, enthaltend Arithmetik, ebene Geometrie, Buchstabenrechnung, Algebra, Analytische Geometrie, gewöhnliche und analytische ebene Trigonometrie, Polygonometrie und Kegelschnitte. Zum Gebrauch für Schulen", Berlin 1828. Jeder Interessent wusste also, woran er war. Aber natürlich kann man diese ausführlichen Titel auch als ,,hochtrabende Überschriften" diskreditieren, was Grusons Kritiker und Neider genüsslich taten. Mit anderen Büchern wie ,,Geodäsie oder vollständige Anleitung zur geometrischen und ökonomischen Felderteilung", ,,Anwendung der Analysis auf eine ökonomische Aufgabe; von dem Verhältnis der Aecker, ihren Wiesen und Viehzucht gegeneinander" oder über ,,Dreyecksmeßkunst" zur Anwendung für ,,Feldmesskunst, Krieg- und bürgerliche Baukunst" nebst der

,,nöthigen Tabellen" versuchte er, Landvermesser, Offiziere und Bauingenieure zu erreichen.



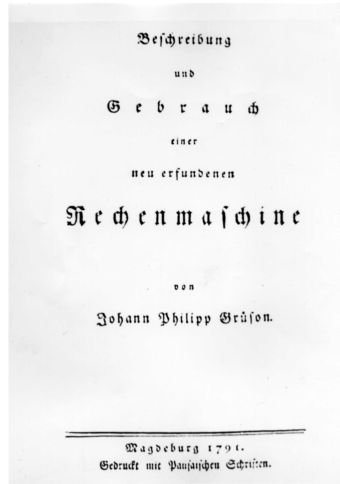
Pinakothek,
oder
Sammlung allgemeiner nützlicher Tafeln
für Jedermann,
zum
Multipliziren und Dividiren.

Erfunden im Jahre 1788
von
Johann Philipp Grüson,
Königl. Professor der Mathematik am Kadettencorps in Berlin.

Nebst einer Tafel aller einfachen Factoren von 1 bis 10500.

Berlin.
Bey F. T. Lagarde.
1798.

Titel eines Buches zur Mathematik



Beschreibung
und
Gebrauch
einer
neu erfundenen
Rechenmaschine

von
Johann Philipp Grüson.

Magdeburg 1791.
Gedruckt mit Pausischen Schriften.

Titel eines Buches zur Rechenmaschine

Geometrische Konstruktionen nur mit dem Zirkel

Mit sieben anderen Büchern verfolgte Gruson ein ganz anderes Ziel. Es handelte sich ausschließlich um Übersetzungen aus dem Französischen, in das vorher zwei aus dem Englischen, je eines aus dem Italienischen und aus dem Deutschen (!) übersetzt worden waren. Es waren ausschließlich Werke, die für Fortschritte in verschiedenen Teilgebieten der Mathematik eine bedeutsame Rolle spielten bzw. gespielt hatten. Das Werk ,,La geometria del compasso" (Geometrie des Zirkels) von L. Mascheroni (1750 - 1800), 1797, erschien 1798 und 1828 in zwei französischen Ausgaben; Grusons Übersetzung wurde durch eine Theorie des Proportionalzirkels und eine Sammlung von über 400 Übungsaufgaben ergänzt und erschien 1825 unter dem Titel ,,Gebrauch des Zirkels". Inhalt dieses Buches ist der Nachweis, dass alle mit Zirkel und Lineal lösbaren Konstruktionsaufgaben nur mit dem Zirkel allein gelöst werden können. Gruson fertigte nicht nur formale Übersetzungen an, er bereitete den Stoff auf, um ihn anwendungsbereit darzubieten und zugleich den Zugang zu den damals aktuellen Untersuchungen und neuen Ergebnissen vorzubereiten und zu erleichtern.

Nachschlagen aber nicht rechnen

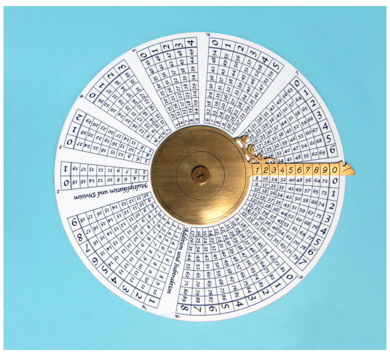
Wesentlich andere Ziele verfolgte J. P. Gruson mit seinen Tafelwerken. Rechenfertigkeiten waren damals nicht sehr ausgeprägt. Es gab oftmals Unsicherheit und Unzuverlässigkeit. Er wollte mit seinen Werken Hilfsmittel anbieten, die ein Gefühl der Sicherheit und das Vertrauen in die Mathematik festigen sollten. ,,Großes Einmaleins", Berlin 1799; ,,Kleines Hand- und Hilfsbuch zur Ersparung des Ausrechnens bei dem Ein- und Verkauf nützlicher Bedürfnisse nach dem neuen, dem königlichen Edikt vom 13. Dezember 1811 in Umlauf zu setzende Münzsorte, den Thaler zu 30 Silbergroschen und den Groschen zu 10 Pfennigen", Berlin 1812. Neben seinen Vorträgen in der Akademie fanden sich in deren Abhandlungen 25 Beiträge; sie beschäftigten sich mit geometrischen Problemen und solchen der Differential- und Integralrechnung. Aus dem Rahmen fiel sicher eine Publikation in den Abhandlungen der Akademie von 1812/13 ,,Über die bei Witwenkassen anfallenden Wahrscheinlichkeitsrechnungen".

Zauberische Arithmetik

Zwei Bücher von J. P. Gruson lassen sich nirgends einordnen. Er war sehr bemüht, Anwendungen der Mathematik bekannt zu machen und wollte zeigen, dass mathematische Kenntnisse und mathematisches Wissen im Alltag hilfreich und nützlich sind. Er legte ein zweibändiges Werk vor: ,,Enthüllte Zaubereyen und Geheimnisse der Arithmetik nebst einer Einleitung zur Kenntnis der Rechnung mit Decimalbrüchen und Buchstaben", Band 1 und ,,Enthüllte Zaubereyen und Geheimnisse der Arithmetik nebst einer Einleitung zur Kenntnis der Rechnung mit Logarithmen und Buchstaben", Band 2 (Berlin 1800). Es finden sich Zerlegung von Zahlen, Eigenschaften von Quadratzahlen, Teilbarkeitsregeln, Rechnen im Duodecimal- und Binärsystem, Abmeß- und Umfüllaufgaben, Berechnung von Einzelpreisen, Mischaufgaben (Verdünnen von Wein mit Wasser!), Aufgaben zur Kapitalbildung und Entschuldung, Erbteilungsaufgaben und sehr viele Aufgaben und Beispiele, die bildend und unterhaltend zugleich sind, vielseitig und interessant vom Inhalt her, verständlich in der Darstellung. Gruson stellte anwendbare Mathematik einprägsam vor. Aus heutiger Sicht ist wohl die Bezeichnung ,,vortrefflich gelungenes populär-wissenschaftliches Werk" berechtigt.

Rechenmaschine ohne Räderwerk

Am 2. Februar 1790 erfand Gruson eine Rechenmaschine, d. h. an diesem Tag, an dem er sein 22. Lebensjahr vollendete, machte er seine Erfindung bekannt. Selbst Kritiker bescheinigten ihm, dass diese scheint ,,Beifall gefunden zu haben”. Denn: ,,Je einfacher eine Maschine ist, je weniger Räder sie hat, desto besser. In dieser Rücksicht macht die Grusonsche Rechenmaschine gewiss allen ihren Schwestern den Rang streitig. Sie ist eine einfache Scheibe, und leistet dennoch zum mechanischen Rechnen die Dienste einer zusammengesetzten Maschine.” Die letzte Bemerkung bedeutete, dass die Ausführung aller vier Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) möglich ist. Allerdings wurde nicht darauf hingewiesen, dass die Handhabung der Rechenscheibe sehr umständlich ist. Jedenfalls wurden diese Scheiben vom Durchmesser von 0,7 rheinischen Fuß (etwa 22 cm) ab November 1790 für den stolzen Preis von ,,1 Thaler und 2 Groschen” und mit der Aufschrift ,,Rechenmaschine, erfunden von Johann Philipp Gruson, Magdeburg, 2. Februar 1790” in Magdeburg verkauft. Ein Originalexemplar konnte bisher nicht gefunden werden. Verschiedene jeweils unvollständige oder ungenaue Beschreibungen erschwerten den Nachbau, der im Jahr der Mathematik endlich gelungen zu sein scheint.



Die in Magdeburg nachgebaute Rechenscheibe mit einem Weiser für die Multiplikation mit der 8; unterhalb des Weisers sind die Vielfachen von 8 ablesbar

Johann Philipp Gruson - ein Anwender der Mathematik

Von 1813 - 1819 arbeitete Gruson erfolgreich an Chiffrier- und Dechiffrieraufgaben für den militärischen und den zivilen Bereich. Er lehrte am Französischen Gymnasium. Unter seinen Schülern waren dort die Söhne von G. W. F. Hegel (1770 - 1831), der eine Zeit lang Dekan der Philosophischen Fakultät war, der Gruson als Extra-Ordinarius angehörte. 1840/41 hatte Gruson seinen Großneffen Jaques Hermann August Gruson (1821 - 1895) als Hörer in seinen Vorlesungen ,,Statik” und ,,Dynamik", der als bedeutender Ingenieur und Firmengründer bekannt wurde.

J. P. Gruson sagte von sich kurz vor seinem Tode: ,,Tous mes jours etaient des jours de fete" - (in freier Übersetzung:) ,,Ich habe gelebt." Er starb wenige Monate vor Vollendung seines 90. Lebensjahres am 16. November 1857 in Berlin.

Als Lehrender, als Verfasser von Lehrbüchern und Aufgabensammlungen, als Übersetzer und Herausgeber fremdsprachiger Fachliteratur erwarb sich Gruson große Verdienste. Durch seine Tabellenwerke, mit seiner Rechenscheibe und durch seine anwendungsorientierte Publikations- und Lehrtätigkeit galt er als erfolgreicher Streiter für Anwendungen der Mathematik ,,im gemeinen Leben".

Meine Meinung zur Bedeutung der Mathematik kommt im folgenden Zitat von Leonardo da Vinci (1552 - 1619) prägnant zum Ausdruck:
,,Es wird keinerlei Glaubwürdigkeit in den Wissenschaften geben, wo man keine der mathematischen Wissenschaften anwenden kann, und auch nicht in dem, was keine Verbindung zur Mathematik hat. Jedwede Praxis muss auf einer guten Theorie zu Markt und Ansehen gebracht werden."

Otto-von-Guericke Universität Magdbeurg, Fakultät für Mathematik, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg

Der mathematische Blick (Teil 11)

Lotto – und wann werde ich reich?

Mathematik ist Überraschung, Abenteuer und Experiment. Professoren der Fakultät für Mathematik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg nehmen das „Jahr der Mathematik“ zum Anlass, um dies in einer Beitragsreihe zu veranschaulichen. Im 11. und letzten Teil geht es heute um die Chancen des Glücksspiels.

Von **Prof. Dr. Gerd Christoph**

Lottofee Heike Maurer präsentierte am Abend des 5. Dezember 2007 im ZDF die Lottozahlen der Mittwoch-Ziehung im Spiel 6 aus 49. Drei Spieler hatten genau diese Zahlen und teilten sich damit den mit 45 Millionen Euro gefüllten, bisher größten deutschen Lotto-Jackpot. Foto: dpa

In elf Tagen ist Weihnachten. Wer würde sich da nicht über einige Lotto-Millionen freuen? Am 13. Oktober 2008 konnte die Lottogesellschaft Sachsen-Anhalts immerhin schon den 70. Lotto-Millionär seit 1991 in unserem Bundesland beglückwünschen. „Und wann bin ich dran?“, fragen sich all die anderen. Wie hoch ist eigentlich die Chance, mit einem Lotto-Gewinn schnell reich zu werden?

In der italienischen Hafenstadt Genua wurden ab 1576 halbjährlich durch Losentscheid zwei neue Senatoren bestimmt. Die Namen der 90 bis 120 Kandidaten wurden auf Zettel geschrieben und verdeckt zwei davon gezogen. Natürlich wurden in Wirtshäusern sofort hohe Wetten abgeschlossen, auf wen das Los wohl fällt. Wenig später wurden die Namen durch die Zahlen 1 bis 90 ersetzt und 5 Zettel gezogen, die Lotterie 5 aus 90 war geboren.

Lotterien als Mittel der Geldbeschaffung

Sanktioniert durch ein Patent des preußischen Königs Friedrich II. erfolgte am 31. August 1763 auch in Berlin die erste öffentliche Ziehung der Lotterie 5 aus 90. Die acht Ziehungen von 1763 brachten der Staatskasse einen Reingewinn von 18 969 Talern. Schnell war ersichtlich, dass mit einer Lotterie große Gewinne für den Veranstalter erzielt werden, weswegen in der Regel der Staat sich das Recht vorbehält, Lotterien selbst zu veranstalten oder Konzessionen zu vergeben.

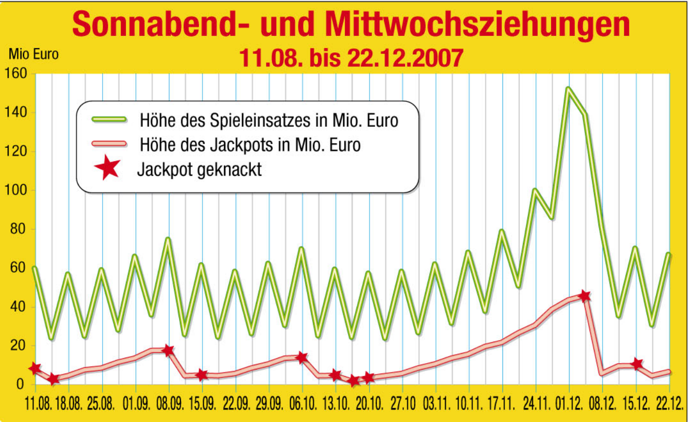
Heute ist das klassische Lotto 6 aus 49 am beliebtesten. Am 9. Oktober 1955 wurde in Hamburg mit der 13 die erste Glückszahl im Spiel 6 aus 49 gezogen, drei Monate später wurde auch in der DDR das Sportfest-Toto 6 aus 49 eingeführt.

Einen Gewinn erzielt, wer mindestens drei der sechs richtigen Zahlen angekreuzt hat. Um höhere Gewinne (für die Spieler und die Betreiber) zu ermöglichen, wird seit Dezember 1991 zusätzlich eine Superzahl ausgespielt. Es gibt acht Gewinnklassen. Für die erste müssen die 6 Gewinnzahlen auf dem Lottoschein angekreuzt sein und die Superzahl mit der letzen Ziffer der Losnummer übereinstimmen. Gibt es in einer Gewinnklasse keinen Gewinner, wird die Gewinnsumme der gleichen Gewinnklasse in der folgenden Ziehung hinzugefügt, so entsteht der Jackpot.

Mittwochs werden gewöhnlich rund 25 Millionen Tipps abgegeben, wesentlich weniger als sonnabends mit etwa 60 Millionen Tipps. Aber bei gut gefülltem Jackpot steigt die Spielfreude gewaltig (siehe Grafik). Ihren bisherigen Höhepunkt erreichte sie mit 202 Millionen Tipps am Sonnabend, dem 1. Dezember 2007 – ohne dass der Jackpot geknackt wurde. Mit 45 382 458 Euro gefüllt, wurde dann am darauffolgenden Mittwoch, dem 5. Dezember nach 12 Ziehungen ohne Jackpot-Gewinn die bisher höchste Summe in der ersten Gewinnklasse auf drei Gewinner aufgeteilt.

Als Gewinne werden 50 Prozent der Spieleinsätze wieder ausgezahlt. Aber, wie auf der Homepage von Lotto Sachsen-Anhalt unter „Lotto fördert“ zu lesen ist, wird mit jedem Tipp das Allgemeinwohl unterstützt. Seit 1991 wurden mit rund 132 Millionen Euro Projekte aus den Bereichen Kultur, Denkmalschutz, Soziales, Sport und Umwelt gefördert.

In der Regel haben Sie zweimal wöchentlich die Chance auf einen Millionengewinn. Sie müssen „nur“ die 6 Gewinnzahlen auf Ihrem Tippschein angekreuzt und dazu die richtige Superzahl haben, dann dürfen Sie hoffen.



Die Höhe des Spieleinsatzes und die Höhe des Jackpots bei 39 Ziehungen in der Zeit vom 11. August bis zum 22. Dezember 2007.

Anzahl der Tipps in Millionen	$P(S_N = 0)$ kein Gewinner	$P(S_N > 0)$ Jackpot geknackt
20	0,866	0,134
40	0,75	0,25
60	0,649	0,351
80	0,562	0,438
100	0,487	0,513
120	0,421	0,579
140	0,365	0,635
160	0,316	0,684
180	0,273	0,727
200	0,237	0,763
300	0,116	0,884
500	0,027	0,973

Die Tabelle stellt die Wahrscheinlichkeiten dar, mit der der Jackpot geknackt wird ☛ P(SN>0) und mit der er nicht geknackt wird ☛ P(SN=0).

Aus den Zahlen 1, 2, ..., 49 lassen sich fast 14 Millionen, ganz genau 13 983 816, verschiedene Tippreihen zu sechs verschiedenen Zahlen finden, dazu gibt es noch 10 mögliche Superzahlen. Ihre Chance, mit einem Tipp den Jackpot zu knacken, steht damit bei 1:139 838 160, somit ist die Wahrscheinlichkeit für einen Supergewinn 0,00000000715.

Leider haben wir kein Organ, mit dem wir so große Zahlen wie 140 Millionen wirklich wahrnehmen können, auch werden oft geringe Wahrscheinlichkeiten weit überschätzt.

Stellen Sie sich einen Würfel mit 5,19 Metern Kantenlänge vor, den Sie mit einer großen Säge in kleine Würfel mit einem Zentimeter Kantenlänge zersägen, dann erhalten Sie fast so viele kleine Würfel wie mögliche Tipps. Einen Würfel färben Sie nun ein, mischen alles gut und versuchen, mit einem Griff den farbigen Würfel zu erwischen. (Um sich die 500 Milliarden Euro aus dem Bankenrettungspaket der Regierung vorzustellen, müsste der zu zersägende Würfel eine Kantenlänge von 79,37 Meter haben, wenn jeder Kubikzentimeter-Würfel einen Euro darstellt.)

Wissenschaftsjahr 2008
Mathematik
Alles, was zählt

Alle Folgen der Serie „Der mathematische Blick“ im Internet auf www.volksstimme.de

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens drei Richtige, um überhaupt etwas bei 6 aus 49 zu gewinnen, liegt bei 0,018, also nur 1,8 Prozent. Spielen Sie in einer Ziehung für 90 Euro mit 10 Scheinen à 12 Tipps, so haben Sie im Mittel zwei Gewinne. Zwei Dreier bringen im Mittel 20 Euro, aber vielleicht ist ja auch ein Sechser dabei. Leider tritt ein Dreier 246 820 Mal häufiger auf als ein Sechser.

Als im vergangenen Jahr um den 45-Millionen-Euro-Jackpot gespielt wurde, bin ich gefragt worden, ob es sich lohne, alle möglichen Tipps zu spielen. Da ein Tipp 0,75 Euro kostet, benötigen Sie 105 Millionen Euro, um alle Tipps zu spielen. 12 Tipps passen auf einen Normallottoschein. Der Stapel Normalscheine wäre 1,4 km hoch. Bei angenommenen 8 Sekunden pro Tipp benötigten Sie rund 35 Jahre zum Ankreuzen aller Tipps. Da aber nur 50 Prozent der Spieleinsätze wieder ausgespielt werden, ist diese Variante ein großes Verlustgeschäft, zumal ja noch weitere Gewinner den Jackpot knacken könnten.

Die Wahrscheinlichkeit, den Jackpot zu knacken

Wir Mathematiker versuchen immer, an die reale Situation ein möglichst genaues, aber berechenbares einfacheres Modell anzupassen. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Knacken des Jackpots verwenden wir das Modell des Bernoulli-Versuches, welches die Anzahl der Erfolge S_N bei N unabhängigen Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p zählt. Aus dem Spieleinsatz und den Kosten von 0,75 Euro pro Tipp berechnen wir die Anzahl N der abgegebenen Tipps für eine Ziehung.

Ein Tipp knackt den Jackpot mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p=0,00000000715. S_N gibt nun die Anzahl der Jackpot-Gewinner an, die natürlich zufällig ist und Werte von 0 bis N annehmen kann. Einfacher ist es, die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $S_N=0$ zu bestimmen, das heißt, dass der Jackpot nicht geknackt wird. Da N sehr groß und p sehr klein ist, kann nach dem Poissonschen Grenzwertsatz diese Wahrscheinlichkeit durch e^{-Np} mit großer Annäherung berechnet werden, wobei e die Eulersche Zahl e=2,718... ist. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeiten für das Knacken des Jackpots $P(S_N>0)$ sowie das Nichtknacken $P(S_N=0)$ in Abhängigkeit von der Anzahl der Tipps.

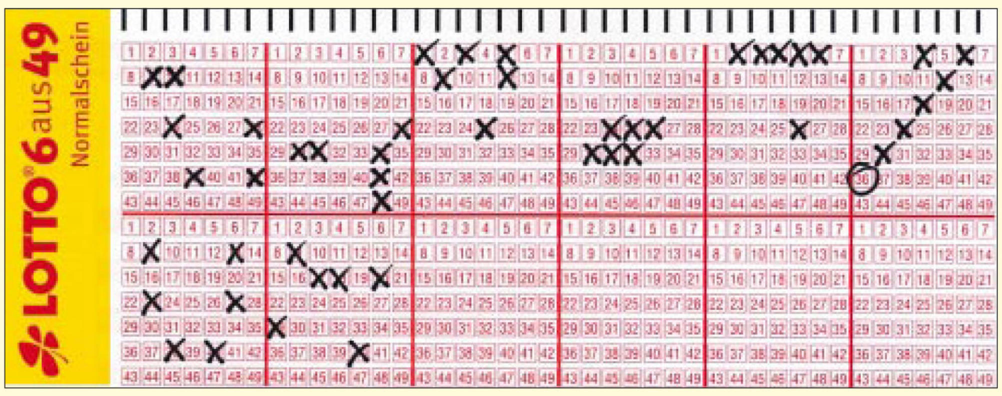
Natürlich lassen sich auch die Wahrscheinlichkeiten dafür bestimmen, ob mehrere Gewinner sich den Jackpot teilen müssen. Beim bisher größten Jackpot von mehr als 45 Millionen Euro am 5. Dezember 2007 waren es drei Gewinner. Der Spieleinsatz betrug 138 529 178,25 Euro. Hieraus folgt, dass die Anzahl der Tipps N=184 705 571 war. Nach dem schon erwähnten Poissonschen Grenzwertsatz erhalten wir die Wahrscheinlichkeiten $P(S_N=0)=0{,}267$, $P(S_N=1)=0{,}353$, $P(S_N=2)=0{,}233$, $P(S_N=3)=0{,}102$ und $P(S_N>3)=0{,}045$. Am wahrscheinlichsten wäre ein einziger Gewinner gewesen, aber der Zufall hat es anders gewollt.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für einen Tipp kann nicht verbessert werden. Wenn Sie aber einmal unter den Glücklichen sind, dann möchten Sie sicherlich die Quote nicht mit zu vielen anderen Gewinnern teilen. Ausgefallene Tippreihen bringen höhere Gewinne, aber vielleicht denken ja viele so. Auf dem Lottoschein sind einige „berühmte“ Tipps aufgezeichnet (siehe Kasten).

Immerhin: Die Chance auf den Jackpot ist viermal größer, als bei Günter Jauchs „Wer wird Millionär“ durch reines Raten eine Million zu gewinnen. Da liegt die Wahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung des 50:50-Jokers nur bei 1:536 870 912.

Ich wünsche Ihnen viel Glück beim nächsten Lotto-Spiel. Als Mathematiker rate ich Ihnen, lieber den Weihnachtsmarkt zu besuchen und einen Glühwein zu trinken.

Die größten und kleinsten Gewinne bei 6 Richtigen



- **Der erste Tipp** (mit Superzahl 3) knackte den bisher höchsten Jackpot am 5.12.2007.
- **Der zweite Tipp** brachte den höchsten Einzelgewinn von fast 37,7 Millionen Euro am 7.10.2006.
- 69 Spieler hatten mit dem **dritten Tipp** am 25.4.1984 die geringste Quote in der 2. Klasse (6 Richtige) und erhielten je nur 8644,41 Euro.
- Die höchste Anzahl der Gewinner mit 6 Richtigen gab es am 23.1.1977 mit den zwei Drillingen des **vierten Tipps**. 222 Gewinner bekamen aber noch je 84 803,90 Euro.
- **Der fünfte Tipp** mit Superzahl 4 brachte am 10.4.1999 drei Jackpot-Gewinnern je 2 162 552 Euro, aber 38 008 Spieler hatten 5 Richtige und bekamen jeder nur 194,24 Euro.
- Die Linie (mit Zusatzzahl 36) auf dem **sechsten Tipp** vom 15.2.2003 und die U-Form auf dem **siebten Tipp** vom 4.7.1995 bildeten zwar schöne Muster, brachten aber nur sehr geringe Quoten.
- **Achter Tipp**: Für die Ziehung am 18.6.1977 übernahmen 205 Tipper die Gewinnzahlen der niederländischen Lotterie aus der Vorwoche und erhielten je nur 15 368,90 Euro.

Lotto, Auf Einmal Bist Du Reich?

GERD CHRISTOPH

In 11 Tagen ist Weihnachten, wer würde sich da nicht über einige Lotto-Millionen freuen? Am 13. Oktober 2008 konnte Lotto Sachsen-Anhalt den 70. Lotto-Millionär seit 1991 in unserem Bundesland beglückwünschen. Wie hoch sind eigentlich Ihre Chancen, bald reich zu sein?

Lotterien als Mittel zur Geldbeschaffung

In der italienischen Hafenstadt Genua wurden ab 1576 halbjährlich durch Losentscheid zwei neu zu ernennende Senatoren bestimmt. Auf Zettel wurden die Namen der 90 bis 120 bekannten Kandidaten geschrieben und verdeckt zwei davon gezogen. Natürlich wurden in Wirtshäusern sofort hohe Wetten abgeschlossen, auf wen das Los wohl fällt. Wenig später wurden die Namen durch die Zahlen 1 bis 90 ersetzt und 5 Zettel gezogen, die Lotterie 5 aus 90 war geboren. Sanktioniert durch ein Patent des preußischen Königs Friedrich II erfolgte am 31. August 1763 die erste öffentliche Ziehung 5 aus 90 in Berlin. Die acht Ziehungen von 1763 brachten einen Reingewinn von 18.969 Talern für die Staatskasse. Schnell war ersichtlich, dass mit einer Lotterie große Gewinne für den Veranstalter erzielt werden, weswegen in der Regel der Staat sich das Recht vorbehält, Lotterien zu veranstalten bzw. er vergibt Konzessionen.

Heute ist das klassische LOTTO 6 aus 49 am beliebtesten. Am 9. Oktober 1955 wurde in Hamburg mit der 13 die erste Glückszahl im Spiel 6 aus 49 gezogen, drei Monate später wurde auch in der DDR das Sportfest-Toto 6 aus 49 eingeführt. Einen Gewinn erzielt, wer mindestens drei der sechs richtigen Zahlen angekreuzt hat. Um höhere Gewinne (für die Spieler und die Betreiber) zu ermöglichen, wird seit Dezember 1991 zusätzlich eine Superzahl ausgespielt. Es gibt acht Gewinnklassen, für die unterschiedliche Quoten der Gewinnausschüttung festgeschrieben sind. Für die erste Gewinnklasse müssen die 6 Gewinnzahlen auf dem Lottoschein angekreuzt sein und die Superzahl mit der letzen Ziffer der Losnummer übereinstimmen. Gibt es in einer Gewinnklasse keinen Gewinner, wird die Gewinnsumme der gleichen Gewinnklasse in der folgenden Ziehung hinzugefügt, so entsteht der Jackpot. In dem ersten Diagramm sind jeweils die Höhe des Spieleinsatzes und die Höhe des Jackpots der ersten Gewinnklasse vom 11.8. bis 22.12.2007 (39 Ziehungen) dargestellt. Mittwochs werden gewöhnlich ca. 25 Millionen Tipps abgegeben, wesentlich weniger als samstags mit ca. 60 Millionen Tipps. Aber bei gut gefülltem Jackpot steigt die Spielfreude gewaltig, die mit 202 Millionen Tipps am Samstag, den 1.12.2007, ihren bisherigen Höhepunkt erreichte, ohne dass aber der Jackpot geknackt wurde. Mit 45.382.458 Euro gefüllt, wurde dann am 5.12.2007 nach 12 Ziehungen ohne Jackpot-Gewinn die bisher höchste Summe in der ersten Gewinnklasse auf drei Gewinner aufgeteilt.

Als Gewinne werden 50 % der Spieleinsätze wieder ausgezahlt. Aber, wie auf der Homepage von Lotto Sachsen-Anhalt unter ,,Lotto fördert" zu lesen ist, wird mit jedem Tipp das Allgemeinwohl unseres Landes unterstützt. Seit 1991 wurden mit rund 132 Millionen Euro Projekte aus den Bereichen Kultur, Denkmalschutz, Soziales, Sport und Umwelt gefördert.

Gewinnchancen

In der Regel haben Sie zweimal wöchentlich die Chance auf einen Millionengewinn. Wirklich? Ja, natürlich, und auf ganz ehrliche Art. Sie brauchen „nur“ die 6 Gewinnzahlen auf Ihrem Tippschein anzukreuzen und die richtige Superzahl haben, dann dürfen Sie hoffen. Aus den Zahlen $1, 2, \ldots, 49$ lassen sich fast 14 Millionen, ganz genau 13.983.816, verschiedene Tippreihen zu sechs verschiedenen Zahlen finden, dazu gibt es noch 10 mögliche Superzahlen. Ihre Chance, mit einem Tipp den Jackpot zu knacken, ist 1 : 139.838.160, somit ist die Wahrscheinlichkeit für einen Supergewinn 0,00000000715. Leider haben wir kein Organ, mit dem wir so große Zahlen wie 140 Millionen wirklich wahrnehmen

können, auch werden oft kleine Wahrscheinlichkeiten weit überschätzt. Stellen Sie sich einen Würfel mit 5,19 Meter Kantenlänge vor, den Sie mit einer großen Säge in kleine Würfel mit einem Zentimeter Kantenlänge zersägen, dann erhalten Sie fast so viele kleine Würfel wie mögliche Tipps. Einen Würfel färben Sie nun ein, mischen alles gut und versuchen, mit einem Griff den farbigen Würfel zu erwischen. (Um sich die 500 Milliarden aus dem Bankenrettungspaket vorzustellen, müsste der zu zersägende Würfel eine Kantenlänge von 79,37 Meter haben.)
Die Wahrscheinlichkeit für mindestens drei Richtige, um überhaupt etwas im Lotto 6 aus 49 zu gewinnen, ist nur 0,018, also nur 1,8 %.

Gibt es einen sicheren Tipp?

Als im vergangenen Jahr um den 43 Millionen Euro Jackpot gespielt wurde, bin ich gefragt worden, ob es sich lohne, alle möglichen Tipps zu spielen. Da ein Tipp 0,75 Euro kostet, benötigen Sie 105 Millionen Euro, um alle Tipps zu spielen. 12 Tipps passen auf einen Normallottoschein. Der Stapel Normalscheine wäre 1,4 km hoch. Bei angenommenen 8 Sekunden pro Tipp benötigten Sie ca. 35 Jahre zum Ankreuzen aller Tipps. Da aber nur 50 % der Spieleinsätze wieder ausgespielt werden, ist diese Variante ein großes Verlustgeschäft, zudem ja auch noch mehrere Gewinner den Jackpot knacken könnten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Jackpot geknackt wird

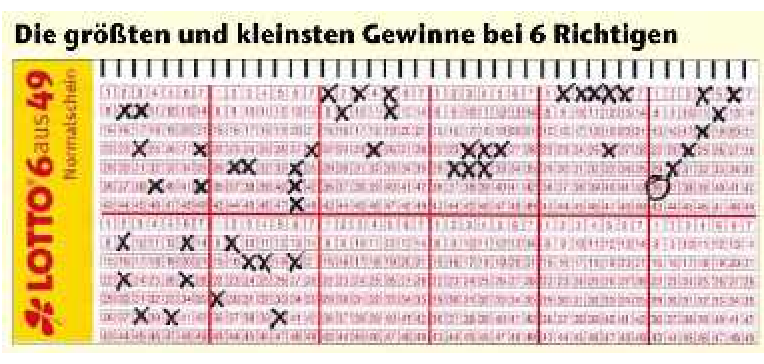
Wir Mathematiker versuchen immer, an die reale Situation ein möglichst genaues, aber berechenbares einfacheres Modell anzupassen. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Knacken des Jackpots verwenden wir das Modell des Bernoulli-Versuches, welches die Anzahl der Erfolge SN bei N unabhängigen Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p zählt. Aus dem Spieleinsatz und den Kosten von 0,75 Euro pro Tipp berechnen wir die Anzahl N der abgegebenen Tipps für eine Ziehung. Ein Tipp knackt den Jackpot mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0,00000000715$ und SN gibt nun die Anzahl der Jackpot-Gewinner an, die natürlich zufällig ist und Werte von 0 bis N annehmen kann. Einfacher ist es, die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\{SN = 0\}$ zu bestimmen, d.h. dass der Jackpot nicht geknackt wird. Da N sehr groß und p sehr klein ist, kann nach dem Poissonschen Grenzwertsatz diese Wahrscheinlichkeit durch $e - Np$ sehr gut approximiert werden, wobei e die Eulersche Zahl $e = 2,718\ldots$ ist. In der Tabelle sind die Wahrscheinlichkeiten für das Nichtknacken des Jackpots $P(\{SN = 0\})$ und die komplementäre Wahrscheinlichkeit $P(\{SN > 0\})$ für das Knacken in Abhängigkeit von der Anzahl der abgegebenen Tipps angegeben.

Anzahl der Tipps in Millionen	$P(S_N = 0)$ kein Gewinner	$P(S_N > 0)$ Jackpot geknackt
20	0,866	0,134
40	0,75	0,25
60	0,649	0,351
80	0,562	0,438
100	0,487	0,513
120	0,421	0,579
140	0,365	0,635
160	0,316	0,684
180	0,273	0,727
200	0,237	0,763
300	0,116	0,884
500	0,027	0,973

Natürlich lassen sich auch die Wahrscheinlichkeiten dafür bestimmen, ob mehrere Gewinner sich den Jackpot teilen müssen. Beim bisher größten Jackpot von über 45 Millionen Euro am Mittwoch, dem 5.12.2007, waren es drei Gewinner. Der Spieleinsatz betrug 138.529.178,25 Euro, hieraus folgt, dass die Anzahl der Tipps $N = 184.705.571$ war. Nach dem schon erwähnten Poissonschen Grenzwertsatz erhalten wir die Wahrscheinlichkeiten $P(\{SN = 0\}) = 0,267$, $P(\{SN = 1\}) = 0,353$, $P(\{SN = 2\}) = 0,233$, $P(\{SN = 3\}) = 0,102$ und $P(\{SN > 3\}) = 0,045$. Am wahrscheinlichsten wäre ein Gewinner gewesen, aber der Zufall hat es anders gewollt.

Höchste und kleinste Gewinne mit 6 Richtigen

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für einen Tipp kann nicht verbessert werden. Wenn Sie aber einmal unter den Glücklichen sind, dann möchten Sie sicherlich die Quote nicht mit zu vielen anderen Gewinnern teilen. Ausgefallene Tippreihen bringen höhere Gewinne, aber vielleicht denken ja viele so. Auf dem Lottoschein sind einige „berühmte“ Tipps aufgezeichnet:



- Der erste Tipp (allerdings mit Superzahl 3) knackte den höchsten Jackpot am 5.12.2007.
- Der zweite Tipp brachte den höchsten Einzelgewinn von fast 37,7 Millionen Euro am 7.10.2006.

- 69 Spieler hatten mit dem dritten Tipp am 25.4.1984 die geringste Quote in der 2. Klasse (6 Richtige) und erhielten je nur 8.644,41 Euro.
- Die höchste Anzahl der Gewinner mit 6 Richtigen gab es am 23.1.1977 mit zwei Drillingen des vierten Tipps. 222 Gewinner bekamen aber noch je 84.803,90 Euro.
- Der fünfte Tipp mit Superzahl 4 brachte am 10.4.1999 drei Jackpot-Gewinnern je 2.162.552 Euro, aber 38.008 Spieler hatten 5 Richtige und bekamen je nur 194,24 Euro.
- Die Linie (mit Zusatzzahl 36) auf dem 6. Tipp vom 15.2.2003 und die U-Form der 6 Richtigen auf dem 7. Tipp vom 4.7.1995 bildeten zwar schöne Muster, brachten aber nur sehr geringe Quoten.
- Für die Ziehung am 18.6.1977 übernahmen 205 Tipper die Gewinnerzahlen (8. Tipp) der niederländischen Lotterie aus der Vorwoche und erhielten je nur 15.368,90 Euro.

Die Chance, bei Günter Jauch in „Wer wird Millionär“ eine Million nur durch reines Raten zu gewinnen, ist unter Berücksichtigung des 50 : 50 Jokers 1 : 536.870.912, also rund viermal kleiner als ein Jackpot-Gewinn. Ich wünsche Ihnen viel Glück beim nächsten Lotto-Spiel, als Mathematiker rate ich Ihnen aber, lieber auf dem Weihnachtsmarkt einen Glühwein zu trinken.

Quellen: Das große Spiel ums Glück- Ein Streifzug durch die Geschichte des Zahlenlottos. (www.lotto-brandenburg.de, Über uns, LOTTO-Historie), www.lottosachsenanhalt.de, Lotto-Wikipedia

Mathematik ist für mich faszinierend, weil das Endergebnis immer schön aussieht. Gefällt einem das Resultat nicht, ist es bestimmt verbesserbar.

Gerd Christoph

Otto-von-Guericke Universität Magdbeurg, Fakultät für Mathematik, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg